

**Die Wechselwirkung von Seegang und Strömung:
Eine theoretische Grundlegung
mit Modellanwendungen**

(Vom Department Geowissenschaften der Universität Hamburg
als Dissertation angenommene Arbeit)

Autor:

J. Murawski

wissen
schafft
nutzen

GKSS 2007/12

**Die Wechselwirkung von Seegang und Strömung:
Eine theoretische Grundlegung
mit Modellanwendungen**

(Vom Department Geowissenschaften der Universität Hamburg
als Dissertation angenommene Arbeit)

Autor:

J. Murawski

(Institut für Küstenforschung)

Die Berichte der GKSS werden kostenlos abgegeben.
The delivery of the GKSS reports is free of charge.

Anforderungen/Requests:

GKSS-Forschungszentrum Geesthacht GmbH
Bibliothek/Library
Postfach 11 60
D-21494 Geesthacht
Germany
Fax.: (49) 04152/871717

Als Manuskript vervielfältigt.
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor.

ISSN 0344-9629

GKSS-Forschungszentrum Geesthacht GmbH · Telefon (04152)87-0
Max-Planck-Straße 1 · D-21502 Geesthacht / Postfach 11 60 · D-21494 Geesthacht

GKSS 2007/12

Die Wechselwirkung von Seegang und Strömung: Eine theoretische Grundlegung mit Modellanwendungen

(Vom Department Geowissenschaften der Universität Hamburg als Dissertation angenommene Arbeit)

Jens Murawski

140 Seiten mit 24 Abbildungen und 3 Tabellen

Zusammenfassung

In der vorliegenden Doktorarbeit wurde die Wechselbeziehung von Seegang und Strömung theoretisch und numerisch untersucht. Dazu sind Computersimulationen mit einem interaktiv gekoppelten Modell für die großskalige Zirkulation und die windgenerierten Wellen in der Nord- und Ostsee durchgeführt worden. Die beiden, verschiedenskaligen Prozesse: Seegang und Strömung beeinflussen sich nicht nur in der Brandungszone, wo die Wellen brechen, sondern auch im gesamten Off-Shore-Bereich vor der Küste. So sagt die nichtlineare Wellentheorie einen nicht verschwindenden Impulsbeitrag zur mittleren Strömung voraus. Andererseits hängen Propagation und Refraktion der Wellen nichtlinear von der Wassertiefe und der Strömungsgeschwindigkeit ab. Der Seegang wird als periodische Störung des hydrodynamischen Grundzustandes aufgefasst, der mit der Eulerschen Strömung identifiziert wird. Variable Umgebungsbedingungen, z.B. unbeständige Winde, Wassertiefen und Strömungen, beeinflussen die Entwicklung des Seegangs. Die mittlere Strömung, welche ohne den Einfluss der Wellen der Eulerschen Strömung gleicht, passt sich den Veränderungen im Wellenfeld an. Das gekoppelte Seegangs-Strömungs-Modell beschreibt diesen Anpassungsprozess. Der hergeleitete Satz hydrodynamischer Gleichungen für die großskalige Zirkulation ist das Ergebnis einer nichtlinearen Störungsrechnung unter Verwendung der WKB-Approximation. Eine nicht-kanonische, i.a. strömungsabhängige Wirkungsbilanzgleichung für den Seegang ist aus den linearisierten Störungsgleichungen abgeleitet worden. Für räumlich inhomogene und tiefenabhängige Strömungen wurde die Dispersionsrelation harmonischer Wellen mit kleinen Amplituden aus den Gleichungen niedrigster Ordnung, i.a. den Reynoldsgleichungen, abgeleitet. Das Ergebnis ist naturgemäß strömungsabhängig.

Das Seegangs-Strömungs-Modell wurde auf verschiedene Sturmperioden in der Nord- und Ostsee angewandt. Dabei sind die Simulationsergebnisse des gekoppelten Modellsystems mit den Resultaten der separaten Modelle für die mittlere Zirkulation und die windgenerierten Wellen verglichen, und Messwerten gegenübergestellt worden. In Übereinstimmung mit den Beobachtungen zeigen die numerischen Simulationen eine seegangsbedingte Wasserstandserhöhung in der Brandungszone und eine balancierende Strömung entlang der Küste. Die durch Seegangs-Strömungs-Wechselwirkung hervorgerufenen Effekte können von Bedeutung für den Küstenschutz und für küstennahe Applikationen sein.

Wave-Current Interaction: Theoretical Concepts and Model Applications

Abstract

The present thesis deals with the mutual influences of surface waves and currents, which are discussed theoretically and studied on the basis of numerical simulations. Interactively coupled models covering the area of the North and Baltic Seas are used to simulate the large-scale circulation and wind generated waves. Complex interactions between these scale-different processes are not limited to the surf zone, where waves break, but are also taking place in the open ocean. Nonlinear wave theory predicts a non-vanishing momentum contribution to the mean flow. Conversely, wave propagation and refraction depend nonlinearly on water depth and current velocity. Waves are considered to be a periodic perturbation of the fluid's basic state, which is identified with Eulerian flow. Wave evolution is influenced by environmental effects such as changing winds, water depths, and currents. The mean flow, which is equal to the Eulerian flow in the absence of waves, slowly adjust itself to a changing wave field. The coupled wave-current model describes this adjustment process. The final set of hydrodynamic equations for larger-scale circulation is the result of a nonlinear perturbation analysis using the WKB approximation. A non canonical, i.e. current dependent, balance equation for wave action is derived from linearised perturbation equations. For spatially inhomogenous and depth-dependent currents, the dispersion relation for harmonic waves with small amplitudes is derived from the lowest-order equation, i.e. the Reynolds equation. The result is clearly current dependent.

The wave-current model was applied to several storm periods in the North Sea. Simulations run on the coupled model system are compared to runs using separate models for mean circulation and wind waves, and to measurements. In accordance with observations, the numerical simulations show wave setup in the surf zone and balancing alongshore currents due to the decay of the wave field. The wave-current interaction effects may be relevant to coastal protection measures and nearshore applications.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	v
1 Einleitung	1
1.1 Einführung in die Problematik	2
1.2 Motivation und Wissenschaftlicher Hintergrund	3
1.2.1 Die Bilanzgleichung des Seegangs	5
1.2.2 Die Bilanzgleichungen der seegangsbehafteten Strömung	6
2 Symplektische Geometrie und Hamiltonsche Mechanik	9
2.1 Koordinatensysteme und Bezeichnungen	14
3 Die Nicht-Kanonische Theorie	15
3.1 Stabilitätsanalyse	17
3.2 Die <i>WKB</i> -Lösung	20
3.2.1 Gleichung der Ordnung $O(\varepsilon^0)$	22
3.2.2 Gleichung der Ordnung $O(\varepsilon^1)$	23
4 Der Radiationstress-Tensor	29
4.1 Zweidimensionales, homogenes und inkompressibles Fluid	31
4.2 Der Radiationstress eines Flachwasser-Systems	35
4.3 Die dreidimensionale Formulierung des Radiationstress	41

4.3.1	Die Einzelkomponenten des Radiationstress-Tensors	43
4.3.2	Der Radiationstress für ein inkompressibles Fluid.	44
4.3.3	Der Radiationstress für ein Fluid unter Flachwasserbedingungen.	46
5	Die Kanonische Seegangstheorie - Hamilton-Jacobi Theorie	47
5.1	Kanonische Störungstheorie	48
5.1.1	Linearisierte Wellentheorie	49
5.2	Phasendynamik und Radiationstress	52
5.3	Nichtlineare kanonische Störungstheorie	53
6	Konzept des gekoppelten Modells	59
6.1	Das Zirkulationsmodell des <i>BSH</i> (BSHcmod)	60
6.2	Das Wellenmodell der <i>GKSS</i> (<i>k</i> -Modell)	62
6.2.1	<i>k</i> -Model Source-Funktionen	64
6.3	Das Kopplungsschema beider Modelle:	65
7	Anwendung des gekoppelten Modells	67
7.1	Einleitung	67
7.2	Sturmflut von 1962	68
7.2.1	Simulationsergebnisse	69
7.3	Auswertung der Hindcast-Rechnung (1999, 2003)	78
7.3.1	Die Sturmflut von 1999	78
7.3.2	Der Sturm vom 14./15. Dezember 2003	83
7.3.3	Zusammenfassung des Hindcast-Kapitels	86
8	Seegangsabh. Parametrisierung der Windschubspannung	89
8.1	Einführung in das Problem	89

8.2	Der seegangsabhängige Quellterm in der Impulsbilanzgleichung	92
8.3	Simulationsergebnisse	95
9	Zusammenfassung	101
10	Anhänge	107
10.1	Anhang A0: Die Positionsdaten der Messstationen	108
10.2	Anhang A1: Orbits auf einem 1-Tori: Casimirfunktionen	109
10.3	Anhang A2: Die Invarianz der Größe Wellenwirkung	111
10.4	Anhang A3: Die Gleichung der Ordnung $O(\varepsilon^2)$	112
10.5	Der Radiationstress-Tensor eines 3-dim., inkompressiblen Fluids	117
10.6	Anhang A5: Verwendete Symbole und Bezeichnungen	119
	Literaturverzeichnis	125

Abbildungsverzeichnis

6.1	Schematische Darstellung der Simulationsraster des <i>BSH</i> -Zirkulationsmodells	61
6.2	Schematischer Aufbau des gekoppelten Modells (<i>BSH</i> mod & <i>k</i> -Modell)	66
7.1	Windgeschwindigkeit und signifikante Wellenhöhe in der Nordsee zum Zeitpunkt 21:00 Uhr UTC am 16.02.1962	70
7.2	Wasserstand und die Wasserstandsdifferenz in der Deutschen Bucht zum Zeitpunkt 21:00 Uhr am 16.02.1962	71
7.3	Vergleich der Pegelkurven mit Modellwerten für den Zeitraum 15.02.1962 00:00 Uhr UTC bis 17.02.1962 24:00 Uhr UTC an den Orten Husum und Cuxhaven	72
7.4	Strömungsgeschwindigkeit und Strömungsdifferenz in der Deutschen Bucht zum Zeitpunkt 21.00 Uhr UTC am 16.02.1962	73
7.5	Vektordifferenz der Geschwindigkeit des gekoppelten Modells und des Zirkulationsmodells zum Zeitpunkt 21.00 Uhr UTC am 16.02.1962	74
7.6	Wellenhöhe und Wellenhöhendifferenz in der Deutschen Bucht zum Zeitpunkt 21.00 Uhr UTC am 16.02.1962	75
7.7	Vergleich der modellierter Seegangsgößen des gekoppelten Modells mit den Werten des <i>k</i> -Modells für Zeitraum 15.02.1962 00:00 Uhr bis 17.02.1962 24:00 Uhr in Hörnum und Norderpiep	76
7.8	Vergleich der modellierten Seegangsgößen mit Beobachtungswerten für den Zeitraum 15.02.1962 00:00 Uhr bis 17.02.1962 24:00 Uhr an den Stationen P12 und Borkumriff	77
7.9	Windgeschwindigkeit, signifikante Wellenhöhe, Strömungs- und Wasserstandsdifferenz zum Höhepunkt des Sturms „Anatol“ am 03.12.1999 in der Deutschen Bucht	79
7.10	Vergleich der Pegelkurven mit Modellwerten für den Zeitraum 02.12.1999 00:00 Uhr bis 04.12.1999 24:00 Uhr in Cuxhaven und Husum	80

7.11	Vergleich der Ergebnisse des DWD-Lokalmodells mit gemessenen Werten für den Zeitraum 02.12.1999 00:00 Uhr bis 04.12.1999 24:00 Uhr an der Station Deutsche Bucht	81
7.12	Vergleich der Ergebnisse des gekoppelten Modells mit gemessenen Werten für den Zeitraum 02.12.1999 00:00 Uhr bis 04.12.1999 24:00 Uhr an der Station NSB-2	81
7.13	Vergleich der modellierten Seegangsgößen mit gemessenen Werten für den Zeitraum 02.12.1999 00:00 Uhr bis 04.12.1999 24:00 Uhr an der Station Süderhever	82
7.14	Vergleich der modellierten Wasserstände mit Pegelkurven für den Zeitraum 10.12.2003 00:00 Uhr bis 17.12.2003 24:00 Uhr in Cuxhaven	83
7.15	Vergleich der Ergebnisse des DWD-Lokalmodells mit gemessenen Werten für den Zeitraum 10.12.2003 00:00 Uhr bis 17.12.2003 24:00 Uhr. an der Station Deutsche Bucht	84
7.16	Vergleich der modellierten Seegangsgößen mit gemessenen Werten für den Zeitraum 10.12.2003 00:00 Uhr bis 17.12.2003 24:00 Uhr an der Station NSB-2	84
7.17	Vergleich der modellierten Seegangsgößen mit gemessenen Werten für den Zeitraum 10.12.2003 00:00 Uhr bis 17.12.2003 24:00 Uhr an der Station Süderhever	85
8.1	Das Energiefluss-Schema des gekoppelten Modells für Seegang und Strömung	91
8.2	Vergleich der beiden Wasserstandsverteilungen in der Deutschen Bucht, die mit dem Ansatz von Smith & Banke und dem in Kapitel 8.2 hergeleiteten seegangsabhängigen Ansatz für die Windschubspannung berechnet worden sind. (03.12.1999, 18.00 Uhr) .	95
8.3	Vergleich der modellierten Wasserstände mit Pegelkuven für den Zeitraum 02.12.1999 00:00 Uhr bis 04.12.1999 24:00 Uhr in Husum und Cuxhaven	96
8.4	Vergleich der Windschubspannung nach Smith & Banke mit der in Kapitel 8.2 hergeleiteten Windschubspannung. (03.12.1999, 18:00 Uhr)	97
10.1	Position der Messstationen in der Deutschen Bucht	108

Kapitel 1

Einleitung

Diese Arbeit behandelt die Wechselwirkung von Seegang und Strömung. Der erste Teil enthält eine konsistente Herleitung der gekoppelten dynamischen Gleichungen für die mittlere Strömung und die Energie des Seegangs. Dabei stellen die Wellen eine periodische Störung der Eulerschen Strömung dar. Der eingeführte Strömungsbegriff bezieht sich auf alle relevanten dynamischen Variablen des Systems. In den Bilanzgleichungen wird der Strömungszustand mit dem dynamischen Vektor μ identifiziert. Er ist eine Gruppierung aller an der Beschreibung des Bewegungszustandes beteiligten dynamischen Größen. Neben der Geschwindigkeit \underline{v} , bzw. Vorticity q der Strömung kann μ auch die lokale Tiefe h , Dichte ρ und Salzgehalt des Wassers enthalten. Weitere Kombinationen sind denkbar. Die mittlere Strömung $\langle\mu\rangle$ setzt sich aus der Eulerschen Strömung μ_e und dem phasengemittelten Seegangsbeitrag $\langle\delta\mu\rangle$ zusammen. Dabei ist $\delta\mu$ die wellenbedingte Störung des dynamischen Vektors μ_e . Im Sprachgebrauch wird oft nicht zwischen dem Geschwindigkeitsfeld \underline{v} der Strömung und dem Strömungszustand $\mu = (\dots, \underline{v}, \dots)$ unterschieden. Um nicht allzu komplizierte Sätze bilden zu müssen, werden auch in der vorliegenden Arbeit diese beiden Begriffe oft gleichgesetzt. Ich gehe davon aus, dass trotzdem ersichtlich ist, von welchem Sachverhalt gerade die Rede ist.

Im zweiten Teil der Arbeit wird ein skalenaufgelöstes Modell für die Meeresdynamik vorgestellt und es werden die Ergebnisse von hindcast-Rechnungen für einige Sturmflutszenarien ausgewertet. Das numerische Modell setzt sich aus einem Mesoskalen-Modell für den Seegang und einem großskaligen Zirkulationsmodell für die mittlere Strömung zusammen. Beide Modell-Komponenten beschreiben die Dynamik des Seegangs auf den ihnen eigenen charakteristischen räumlichen und zeitlichen Skalen. Der nichtlineare Beitrag des Seegangs zur mittleren Strömung entspricht der Stokesdrift $\mu_{sd} = \langle\delta\mu\rangle$. Dieser mittlere Strömungsanteil wird durch ein inhomogenes Wellenfeld angetrieben. Den damit einhergehenden Impulsaustauschtensor nannten M. S. Longuet-Higgins und R. W. Stewart „radiation stress“. Er kommt vor allem dort zum Tragen, wo sich die Wellen brechen oder anderweitig Seegangsenergie dem Wellenfeld entzogen wird. In den bisherigen Zirkulationsmodellen wird dies nicht berücksichtigt. Auch der Einfluss aktueller Strömungsfelder auf die Refraktion des Seegangs wird in den Wellenmodellen nicht behandelt. Dort verwendet man vorausberechnete Strömungsgeschwindigkeiten und Wasserstände. Bei stetiger Verfeinerung der Modelle mit zunehmender Rechenleistung der Computersysteme wird es aber für eine adäquate Beschreibung notwendig, diese wechselseitigen Effekte zu berücksichtigen. Es existieren Szenarien, bei denen die Interaktion von Seegang und Strömung nicht vernachlässigt werden kann. So kann bei einem kräftigen Wind mit aufländiger Komponente und entsprechender Orographie der Küstenregion der Radiationstress zu einer Wasserstands-differenz von bis zu einem Achtel der ursprünglichen Höhe der Wellen über tiefem Wasser führen [Ros84]. Besonders bei einer Sturmflut und den damit verbundenen hohen Wasserständen

wird der sogenannte „wave set up“ spürbar. Er kann nur durch eine kombinierte Strömungs- und Seegangsvorhersage prognostiziert werden. Die wellenbedingte Wasserstandserhöhung ist mit einer balancierenden Strömung verbunden. Sie ist am stärksten, wenn die Wellen schräg auf eine gerade Küstenlinie treffen. Der damit verbundene Transport von Sediment und Schwebstoff ist von großer Bedeutung für die Gestaltung des Küstenraumes.

1.1 Einführung in die Problematik

Die windinduzierte Scherspannung in der Meeresoberfläche bildet die treibende Kraft für die großskalige Strömung und Wellen. Beide Phänomene werden gleichzeitig erzeugt und beeinflussen sich gegenseitig. Nichtlineare Wellentheorie sagt einen nicht-verschwindenden Impulsbeitrag des Seegangs zur mittleren Strömung voraus. Andererseits hängen Propagation und Refraktion der Wellen nicht-linear von Umgebungsvariablen wie Wassertiefe und Strömungsgeschwindigkeit ab. Experimente im Wellenkanal und dem offenen Meer wurden von Munk [Mnk49], Galvin et al. [Gal65], Bowen et al. [Bow68] und Iwata [Iwa70] durchgeführt. Die Messungen zeigen eine Erhöhung des Wasserstandes und eine Küstenlängsströmung in der Umgebung und innerhalb der Gebiete, wo die Wellen brechen. Verursacht werden die auftretenden Effekte durch den Energie- und Impulsinput des abklingenden Wellenfeldes in die Wassersäule. Die küstenparallele Strömungskomponente und mittlere Wasserstandserhöhung kompensieren den Impulsbeitrag zur mittleren Strömung.

In dieser Arbeit wird das Gesamtsystem Seegang/Strömung mittels nichtlinearer Störungstheorie untersucht. Dazu werden die Bewegungsgleichungen und der Wellenansatz in eine Störungsreihe nach den auftretenden Potenzen des Parameter¹ ε entwickelt. Seegang wird als Störung der Eulerschen Strömung aufgefasst und ein *WKB*-Wellenansatz² in die Hamiltonschen Gleichungen eingeführt. Nach dem Sortieren der Ordnungen in ε erhält man auf diese Weise eine Wirkungsbilanzgleichung für den Seegang in erster Ordnung von ε . Das ist immer der Fall, da die Phasenfunktion des *WKB*-Ansatz der zur Wirkungsvariablen konjugierten Winkelvariablen entspricht. Eine konsequente Weiterführung der Entwicklung bis zur zweiten Ordnung liefert nichtlineare Bilanzgleichungen für die Größen Wellenwirkung und Impuls der mittleren Strömung. Diese Gleichungen beschreiben die Wechselwirkung der Seegangsmode untereinander und, nach Integration über das Volumen $V \in \mathbb{R}^3$ und Phasenmittelung, den Einfluss räumlich variabler Seegangsfelder auf die mittlere Strömung. Darüber hinaus spielt Seegang noch eine entscheidende Rolle bei der Kopplung von Hydrodynamik und Atmosphärenphysik. Unter der Voraussetzung, dass die dissipierte Seegangenergie der Eulerschen Strömung als kinetische Energie zur Verfügung steht, kann ein einheitlicher Mechanismus für den meteorologischen Input von Energie und Impuls in die Seegangs- und Strömungsfelder entwickelt werden. In beiden skalenseparierten Modellen für die großräumige Zirkulation und Wellen wurden bisher problemspezifische Parametrisierungen der Sourcesterme verwendet. In dieser Arbeit wird ein erster Schritt in Richtung eines vollständig gekoppelten Modells für Seegang und Strömung getan, das neben den Wechselwirkungsgrößen noch ein einheitliches Konzept für die Ansteuerung der Modell-Komponenten durch die Source-Funktionen umfasst. Die modellierte und gemessene mittlere Strömung setzt sich aus der Euler- und Stokesdrift zusammen. Der spektral integrierte Windinput des Seegangs (Eulersche Strömung) und die Divergenz des Radiationstress bilden den Antrieb der mitt-

¹Die Ausgangsgleichungen werden nach dem Skalar $\varepsilon \in \mathbb{R}$ entwickelt indem der Störungsansatz $u = u_e + \varepsilon \delta u$ (mit $\delta u = \sum_n \varepsilon^{n-1} \delta^{(n)} u$) in die Gleichungen einführt wird und die entstehenden Terme nach den Potenzen von ε geordnet werden. Die reelle Zahl $\varepsilon \ll 1$ begrenzt den Einfluss der Störung auf die Dynamik der mittleren Strömung.

²Wenn die Wellen durch ein Medium propagieren, das auf typischen räumlichen und zeitlichen Skalen variiert, die viel größer als die Wellenlänge und die Periode des Seegangs sind, dann kann die Störung $\delta \mu$ nach schnell oszillierenden periodischen Funktionen $\delta^{(n)} \mu$ mit nur langsam veränderlichen Amplituden $a^{(n)}$ entwickelt werden. Dieser Ansatz geht auf die Arbeiten von Wenzel, Kramer und Brillouin (*WKB*) zurück.

leren Strömung. Oft wird in den hergeleiteten Modellgleichungen nicht deutlich genug zwischen der mittleren und der Eulerschen Strömung unterschieden. Dann wird die Divergenz des Radiationstress als generalisierte Kraft für die Eulersche Strömung eingeführt und die Stokesdrift vernachlässigt. Ein gekoppeltes Modell für Seegang und Strömung simuliert aber mittlere Größen, die den Beitrag der Stokesdrift enthalten.

Die Struktur der Arbeit ist wie folgt gegliedert. Nach einer kurzen Einführung (Kapitel 2) in die Grundlagen der Hamiltonschen Mechanik wird in Kapitel 3 eine formale Stabilitätsanalyse der Eulerschen Strömung durchgeführt. Das Ergebnis erster Ordnung sind linearisierte Gleichungen, aus denen eine Wirkungsbilanzgleichung für lineare Seegangsmoden hergeleitet wird (Kapitel 3.2.2). Die nichtlinearen Anteile der Störungsrechnung liefern eine formale Beschreibung des Welleneinflusses auf die mittlere Strömung (Kapitel 4). In Kapitel 5 wird die nichtlineare Wechselwirkung von Seegangsmoden untersucht. Aus den Ergebnissen der Störungsrechnung lassen sich Bilanzgleichungen für die Modellierung von Strömung und Seegang herleiten. Bevor das gekoppelte Modell in Kapitel 7 auf ausgesuchte Sturmflut-Szenarien angewendet wird, erfolgt in Kapitel 6 eine kurze Beschreibung der beiden, zum Teil recht unterschiedlichen Modell-Komponenten für Seegang und Strömung. Im Anschluss wird in Kapitel 8 der Versuch unternommen einen einheitlichen Mechanismus für den Windinput von Energie und Impuls in die Seegangs- und Strömungsfelder herzuleiten.

1.2 Motivation und Wissenschaftlicher Hintergrund

Es ist schon seit längerem bekannt, dass die phasengemittelten hydrodynamischen Gleichungen einen residualen Beitrag des Seegangs enthalten. Für ein Newtonsches Fluid lässt sich dieser Anteil als Divergenz des Stresstensors $\underline{\underline{S}}$ in den Bewegungsgleichungen der mittleren Strömung formulieren. Naturgemäß ist der vom Wellenfeld induzierte Stress zu einem Impulsfluss äquivalent, der vor allem in der „surf“-Zone, aber nicht nur da ([Cur79] und [Ros84]), Auswirkungen auf die Dynamik des Wasserkörpers hat. Longuet-Higgins und Steward führten in ihren fundamentalen Arbeiten [LoS60], [LoS61] und [LoS62] für $\underline{\underline{S}}$ die Bezeichnung Radiationstress ein. In ihrem Sinn ergibt sich der Divergenzterm $\nabla \cdot \underline{\underline{S}}_\zeta$ für die durch ζ gekennzeichnete Oberfläche nach Einführen der Zerlegung³ $\mu = \mu_e + \varepsilon \delta \mu$ in die zweidimensionale Impulsbilanzgleichung. Bei der Herleitung wird die Gleichung über die gesamte Wassersäule vom Boden $z = -h_e$ bis zur Oberfläche $z = s(\zeta)$ integriert und anschließend phasengemittelt. In ihren Arbeiten beschränkten sich Longuet-Higgins und Steward darauf, bei der Berechnung von $\underline{\underline{S}}$ für die mittleren Größen μ_e den stationären Spezialfall anzunehmen ($\underline{v}_e = 0$, $p = p_{hs}$; Hydrostatischer Druck p_{hs}). Erst später wurde von K. Hasselmann [Has71] der Radiationstress-Tensor für eine ζ -Oberfläche aus den Bewegungsgleichungen durch Zweiskalenzerlegung der Hydrodynamik in konsistenter Weise hergeleitet. Für den Beitrag des Seegangs zur vertikal integrierten mittleren Impulsbilanz wurde von ihm der Begriff „Interaction“-Stress geprägt. In ihrem Beitrag zum Impulsfluss der mittleren Strömung unterscheiden sich Radiation- und Interaktionstress durch den mittleren welleninduzierten Impulsfluss in der Oberflächenschicht, der sogenannten Stokesdrift (integriert von $z = \langle s(\zeta) \rangle$ bis $z = s(\zeta)$). Die vertikal integrierten Bewegungsgleichungen enthalten die Divergenz des Radiationstress-Tensors als seegangsinduzierten Antrieb. Ein inhomogenes Wellenfeld induziert räumlich variable Schub- oder Scherspannungen $\underline{\underline{S}}$ in den Wasserkörper. Daher simuliert das hydrodynamische Modell der grosskaligen Strömung mittlere Massen- und Impulsflüsse, die den Beitrag der vertikal integrierten Stokesdrift bereits enthalten. Es verwen-

³Der Vektor μ enthält alle, zur Definition des Strömungszustandes notwendigen Variablen. Neben der Geschwindigkeit \underline{v} , bzw. Vorticity q der Strömung, kann dies auch die lokale Tiefe h bzw. Dichte ρ des Wassers sein.

det eine dreidimensionale Formulierung⁴ des Radiationstress-Tensors in der Impulsbilanzgleichung der mittleren Strömung.

Der in [LoS62] und [Has71] hergeleitete Radiationstress-Tensor setzt sich aus dem Reynoldstress $\langle \int \delta \underline{v} \otimes \delta \underline{v} dz \rangle$ und dem residualen Beitrag seegangsbedingter Druckvariationen $\langle \int \underline{\delta} \delta p dz \rangle$ zur mittleren Strömung zusammen. Der Mittelungsoperator über die Phase ϑ linearer Wellen ist gleich $\langle \cdot \rangle = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} (\cdot) d\vartheta$ und der Kronecker-Tensor ist gleich $\underline{\delta}$. Im Laufe der Zeit hat es mehrere Anstöße zur Weiterentwicklung des Radiationstress-Konzeptes gegeben. Rosenthal und Dolata [Ros84] erweiterten den Formalismus von Hasselmann [Has71] und wendeten ihn auf vertikal integrierte Strömungsfelder $\langle \underline{v}(\underline{x}) \rangle$ in verschiedenen Wassertiefen an. In der von ihnen verwendeten pseudo-dreidimensionalen (3-D) Beschreibung werden die relevanten Flüsse nur in der Schicht unterhalb der mitbewegten ζ -Oberfläche betrachtet ($-h_e \leq z \leq s(\zeta)$). Dies gilt auch für die Energieflüsse im Seegangmodell. Oftmals wird gerade dort, bei der Berechnung der spektralen Energietransporte, die Homogenität der Horizontal-Geschwindigkeit über die gesamte Wassersäule gefordert. Ein konsistentes 3-D Strömungs-Seegangmodell, das der Vertikalstruktur der Strömung sowie den mittleren Impuls- und Massenflüssen des Seegangs Rechnung trägt, wurde von Mellor [Mel03] erarbeitet. Wie auch [Ros84] berücksichtigt er bei seiner Herleitung keine internen Wellen. Eine Transformation der hydrodynamischen Gleichungen in sigma-Koordinaten wird dazu verwendet, die Vertikal-Integration und Mittelung zu vertauschen. Im Gegensatz zu [Ros84] wird der residuale Beitrag von Druckfluktuationen $\underline{\delta} \delta p$ zur mittleren Strömung in [Mel03] nicht vernachlässigt. Die in diesem Absatz verwendete Vorsilbe „pseudo“ soll daran erinnern, dass die eingeführte dreidimensionale Formulierung eigentlich eine in jeder Tiefe gültige zweidimensionale Beschreibung der Hydrodynamik darstellt.

In dieser Arbeit werden pseudo-dreidimensionale Probleme als Anwendungsbeispiele für die in Kapitel 4 vorgestellte, allgemein gültige Methode behandelt, den Radiationstress-Tensor aus den nichtkanonischen Bewegungsgleichungen herzuleiten. Die Entwicklung der Hamiltonschen Gleichungen in eine Störungsreihe führt zu einer formalen Beschreibung des seegangsinduzierten Beitrags in den Bewegungsgleichungen der mittleren Strömung. Seegang ist eine periodische Störung der Eulerschen Strömung v_e und der anderen dynamischen Variablen μ_e des Gleichgewichtszustandes. Daher beschreibt das Ergebnis der Störungsrechnung erster Ordnung (Kapitel 3) die zeitliche Entwicklung linearer Wellen (Kapitel 3.2.2). Die phasengemittelten Störungsterme zweiter Ordnung bestimmen die Dynamik der Stokesdrift (Kapitel 4). In der Bilanzgleichung der vertikal integrierten Stokesdrift (1.7) hat der Divergenzterm des Radiationstress die Bedeutung einer Kraft. Da S_{ij} proportional zur Energie der Wellen ist, führt ein räumlich variables Seegangsfeld zu einer Änderung des Betrages der Stokesdrift. Die Richtung und Betrag der Beschleunigung wird im Wesentlichen von zwei Faktoren bestimmt, dem Windantrieb der Wellen und der Dissipation von Seegangsenergie. In Richtung der Wellenausbreitung kann die seegangsinduzierte Beschleunigung ihr Vorzeichen in Abhängigkeit von den meteorologischen und topographischen Gegebenheiten des Gebietes mehrfach ändern.

In den Kapiteln 4.1 und 4.2 wird der Radiationstress-Tensor für eine zweidimensionale, inkompressible Strömung und einem Fluid unter Flachwasser-Bedingungen berechnet. Die dort hergeleiteten Ergebnisse reihen sich in die Arbeiten von [LoS62], [Has71], [Ros84] und [Mel03] ein. Neu ist der Beitrag der dynamischen Variablen μ_e zum Radiationstress-Tensor S_{ij} in den Bilanzgleichungen der mittleren Strömung. Der Tensor S_{ij} hängt nun nicht mehr nur alleine von den Seegangsgrößen ab, sondern auch von der Struktur des Eulerschen Strömungsfeldes \underline{v}_e und der anderen Gleichgewichtsgrößen μ_e in der Umgebung des betrachteten Raumpunktes. Für eine einfache Scherströmung $\underline{v}_e = v_e(\tilde{y}) \underline{\tilde{x}}$ wird der Betrag der Tensor-Komponenten von S_{ij} je nach Krümmung $\partial_{\tilde{y}}^2 v_e(\tilde{y}) < 0$ (oder > 0) des Geschwindigkeitsprofils $v_e(\tilde{y})$ verringert (oder vergrößert). Dabei kennzeichnet $\underline{\tilde{x}}$ den Ortsvektor des Wellenfeldes und $\underline{\tilde{x}}$ den Basisvektor des Koordinatensystems \sum_2 aus Kapitel 2.1. Die Forderung nach Stabilität der Eulerschen Strömung hat eine Analyse der Dynamik von Seegang und

⁴Für eine in jeder ζ -Ebene gültige zweidimensionale Formulierung des Radiationstress wird später die Bezeichnung „pseudo“-dreidimensional eingeführt.

Strömung im affinen Phasenraum mit dem Fixpunkt $\mu_e = (\underline{v}_e, z_e, \dots)$ anstelle des Grundzustandes $\mu_0 = (0, \text{konst.}, \dots)$ zur Folge. Diese Herangehensweise führt zu einer alternativen Definition der Größen Radiationstress und Wellenwirkung in den Bilanzgleichungen der mittleren Strömung und des Seegangs. Die Ergebnisse der Rechnungen werden in den beiden nachfolgenden Kapiteln (1.2.1) und (1.2.2) kurz erläutert.

Die Hamiltonschen Gleichungen bilden ein natürliches System für die Herleitung von approximativen Gleichungen durch die Reduktion des kompletten Hamiltonschen Systems, basierend auf vereinfachenden Näherungen [Sh90]. Die in den Kapiteln 4.1 und 4.2 behandelten Spezialfälle sind Beispiele dafür. Das reduzierte Hamiltonsche System besitzt eindeutige Symmetrien und die dazugehörigen Erhaltungsgrößen aufgrund des Noether-Theorems. Zusätzlich schränken Casimir Invarianten der Bewegung die Dynamik des Systems ein. Die Existenz nichtlinear stabiler Lösungen lässt sich aus den Stabilitätstheoremen von Arnold [Arn65a], [An66b] ableiten. Beide Theoreme machen expliziten Gebrauch von den Eigenschaften der Casimir Invarianten und werden in natürlicher Weise unter Verwendung der Hamiltonschen Struktur der Dynamik formuliert. Die Möglichkeit, fundamentale Symmetrien des Problems und die Stabilitätseigenschaften von Zuständen μ_e bei der Beschreibung der hamiltonschen Dynamik zu berücksichtigen, macht die Energie-Casimir Methode besonders dafür geeignet, den Störungseinfluss auf die zeitliche Entwicklung mittlerer Zustände $\langle \mu \rangle$ zu untersuchen. Die konsequente Anwendung der Stabilitätstheoreme von Arnold in den Gleichungen erster und zweiter Ordnung der Störungsreihe des Hamiltonschen Gleichungssystems führt zu modifizierten Bilanzgleichungen für die Größen Wellenwirkung (1.1) und Impuls der mittleren Strömung (1.6).

1.2.1 Die Bilanzgleichung des Seegangs

Die zentrale Gleichung der Seegangmodellierung ist die Wirkungsbilanzgleichung (1.1). Sie wird in Kapitel 3.2.2 aus den linearisierten Gleichungen des nicht-kanonischen Hamiltonschen Systems (3.3) hergeleitet. Die Bilanzgleichung (1.1) ist unter *WKB*-Bedingungen (langsam veränderlicher Gleichgewichtszustand μ_e) definiert und entspricht der totalen Zeitableitung von $\langle \mathcal{E}\mathcal{F} \rangle$ geteilt durch die intrinsische Frequenz σ . Bei der Herleitung von (1.1) wurde die Definition der phasengemittelten Wellenenergie $\langle \rho g \mathcal{E}\mathcal{F} \rangle / 2$ linearer Seegangsmoden verwendet. Die Energie der Wellen entspricht dem Amplitudenquadrat $\mathcal{E} = a^{(1)} (a^{(1)})^*$ multipliziert mit der skalaren Funktion \mathcal{F} und dem Faktor $\rho_w g / 2$. Oft wird die Dichte des Wassers ρ_w konstant gesetzt und das Amplitudenquadrat $\langle \mathcal{E}\mathcal{F} \rangle$ anstelle der Wellenenergie betrachtet.

Eine kanonische Beschreibung des Seegangs, wie sie im Wellenmodell verwendet wird, ist für $\mathcal{F} = 1$ gegeben. Die hydrodynamischen Bilanzgleichungen sind im Allgemeinen aber nicht-kanonisch⁵ und $\mathcal{F} \neq 1$. In dieser Arbeit werden Wellen als eine periodische Störung des Eulerschen Strömungszustandes μ_e aufgefasst und Bilanzgleichungen für den Seegang durch lineare Störungsanalyse des Eulerschen Strömungszustandes μ_e hergeleitet. Da die formale Stabilität von μ_e gefordert wird, bezeichnet man die Eulersche Strömung auch als Gleichgewichtszustand. Die störungsentwickelten nicht-kanonischen Gleichungen enthalten implizit den Einfluss von μ_e auf die Propagation und Refraktion der Wellen. Das macht sich in den Bilanzgleichungen der linearen Seegangsmoden als Korrektur des kanonischen Wertes $\mathcal{F} = 1$ bemerkbar. Für eine einfache Scherströmung $\underline{v}_e = v_e(\tilde{y}) \underline{\tilde{x}}$ (Kapitel 4.1) ist $\mathcal{F} = 1 + (v_e k^2) / \partial_{\tilde{y}}^2 v_e$, und der Wert von \mathcal{F} hängt von der Krümmung $\partial_{\tilde{y}}^2 v_e$ des Geschwindigkeitsprofils $v_e(\tilde{y})$ und dem Betrag des Wellenzahl-Vektors \underline{k} ab. Dabei ist $\underline{\tilde{x}}$ der Ortsvektor des Wellenfeldes und $\underline{\tilde{x}}$ der Basisvektor des Koordinatensystems \sum_2 aus Kapitel 2.1.

$$\frac{d \langle \mathcal{E}\mathcal{F} \rangle / \sigma}{dT} = \frac{\partial \langle \mathcal{E}\mathcal{F} \rangle / \sigma}{\partial T} + \frac{\partial \langle \mathcal{E}\mathcal{F} \rangle / \sigma}{\partial \underline{X}} \cdot \underline{\dot{X}} + \frac{\partial \langle \mathcal{E}\mathcal{F} \rangle / \sigma}{\partial \underline{k}} \cdot \underline{\dot{k}} = \sum_j Q_j \quad (1.1)$$

⁵Dieser Begriff wird im nächsten Kapitel 2 erläutert.

In Gleichung (1.1) kennzeichnet $\dot{\underline{X}} = \nabla_{\underline{k}}\Omega$ und $\dot{\underline{k}} = -\nabla_{\underline{X}}\Omega$ die totale Zeitableitung des Orts- und Wellenzahlvektors und $\Omega(\underline{k}, \underline{X}, T)$ die Dispersionsrelation linearer Wellen. Wenn $I = \mathcal{E}\mathcal{F}/\sigma$ eine adiabatische Invariante ist (Gleichung (2.10)), dann ist die Summe der Sourceterme Q_j in (1.1) gleich Null.

1.2.2 Die Bilanzgleichungen der seegangsbehafteten Strömung

Für ein dreidimensionales, kompressibles Fluid, das sich unter dem Einfluss der Gravitation in einem mit der Erde mitrotierendem Koordinatensystem bewegt, gelten folgende Bilanzgleichungen für die Masse und dem mechanischen Impuls. (Koordinatensystem \sum_1 Kapitel 2.1)

$$\frac{\partial \rho \underline{v}}{\partial t} = -(\underline{v} \cdot \nabla) \rho \underline{v} - 2 \underline{\Omega}_{\oplus} \times \rho \underline{v} - \nabla(p + \rho g z) \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho \nabla \cdot \underline{v} \quad \text{und} \quad \frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (1.3)$$

Erhaltungsgleichungen für Salinität, Wärmefluss und dem ersten bzw. zweiten Hauptsatz der Thermodynamik sowie die Bilanzgleichung der inneren Energie und die Zustandsgleichung vervollständigen den Satz von Modellgleichungen ([Ap87], [Ped87]). Da der Einfluss von Seegang auf diese Größen vernachlässigbar ist, werden ihre Bilanzgleichungen hier nicht betrachtet.

In dieser Arbeit wird nichtlineare Störungstheorie, dazu verwendet den Radiationstress-Tensor aus den Hamiltonschen Gleichung herzuleiten. Der geophysikalische Fluss wird dazu in den Beitrag der Eulersche Strömung \underline{v}_e und der Störung $\delta \underline{v}$ zerlegt. Die Stokesdrift entspricht dem phasengemittelten Beitrag des Seegangs $\langle \delta \underline{v} \rangle$ zur mittleren Strömung $\langle \underline{v} \rangle$. Eine Spektraldarstellung des Seegangs durch Superposition von ebenen Wellen zu Wellenpaketen

$$\delta \underline{v}(\underline{x}, t) = \int \underline{v}^{(1)}(\underline{k}) e^{i(\underline{k} \cdot \underline{x} - \sigma t)} d^3 k, \quad (1.4)$$

führt nach Taylorentwicklung von $\delta \underline{v}(\underline{x}, t)$ um $\underline{v}(\underline{x}_0, t)$, mit einem Abbruch der Reihendarstellung nach dem linearen Term, und nach Linearisierung von $\sigma(\underline{k})$ im Spektralraum ($\sigma(\underline{k}) = \sigma(\underline{k}_0) + (\underline{k} - \underline{k}_0) \cdot \underline{c}_g(\underline{k}_0)$ mit $\underline{c}_g(\underline{k}_0) = \nabla_{\underline{k}} \sigma(\underline{k})|_{\underline{k}_0}$)

$$\langle \delta \underline{v} \rangle = \left\langle (\underline{X} - \underline{X}_0) \frac{\partial \delta v}{\partial X} \Big|_{X_0} \right\rangle = a^2 \sigma k \frac{\cosh 2k(z_0 + H)}{2 \sinh^2(kH)}, \quad (1.5)$$

zur Stokes Drift $\underline{v}_{sd} = \langle \delta \underline{v} \rangle$ für beliebig tiefes Wasser ([Pij90], [Whi74]). Dabei haben alle Größen ihre herkömmliche Bedeutung. Es wurde stillschweigend vorausgesetzt, dass die Amplitudenfunktion $\underline{v}^{(1)}(\underline{k})$ im Spektralraum um \underline{k}_0 herum lokalisiert ist. Eine Entwicklung der nicht-kanonischen Gleichungen des Hamiltonschen Systems in eine Störungsreihe liefert in zweiter Ordnung eine Bilanzgleichung für $\delta \underline{v}|_{O(\varepsilon^2)}$. Nach Mittelung über die Phase ϑ der Wellen enthält die rechte Seite der Gleichung (1.6) die Divergenz des Radiationstress-Tensors S_{ij} als Antrieb der Stokesdrift. Für ein inkompressibles Fluid (Kapitel 4.1) in der Schicht $s(\zeta_1) \leq z \leq s(\zeta_2)$ ist der Radiationstress-Tensor S_{ij} durch (1.7) gegeben. Es wird nur der Beitrag linearer Seegangsmoden $\delta \underline{v} = \delta^{(1)} \underline{v}$ berücksichtigt. Die vertikal integrierte Impulsbilanzgleichung der seegangsbehafteten Strömung ist gleich (1.6), (Koordinatensystem \sum_2 Kapitel 2.1). Der Impulsflusstensor der mittleren Strömung entspricht $\underline{\tau} = \rho \langle \underline{v} \rangle \otimes \langle \underline{v} \rangle + \underline{\delta}(p + \phi)$ ($\phi(z) = \rho g z$ Geopotential). In einem, mit der Winkelgeschwindigkeit $\underline{\Omega}_{\oplus}$

rotierenden Koordinatensystem ist der Beitrag der Corioliskraft gleich $2 \underline{\Omega}_\oplus \times \langle \rho \underline{v} \rangle$.

$$\int_{s(\zeta_1)}^{s(\zeta_2)} \frac{\partial \langle \rho \underline{v} \rangle}{\partial T} dz = - \int_{s(\zeta_1)}^{s(\zeta_2)} \{ \nabla_{\underline{x}} \cdot \underline{\tau} + 2 \underline{\Omega}_\oplus \times \langle \rho \underline{v} \rangle \} dz - \nabla_{\underline{x}} \cdot \underline{\underline{S}} \quad (1.6)$$

$$\text{mit} \quad \underline{\underline{S}} = \left\langle \int_{s(\zeta_1)}^{s(\zeta_2)} \left\{ \left(1 + \frac{\underline{\delta} \bar{\mathcal{F}}}{2} \right) \rho \delta^{(1)} \underline{v} \otimes \delta^{(1)} \underline{v} + \underline{\underline{\delta}} \delta^{(1)} p \right\} dz \right\rangle \quad (1.7)$$

Für eine einfache Scherströmung $\underline{v}_e = v_e(\tilde{y}) \underline{\tilde{x}}$ ist der Faktor $\bar{\mathcal{F}} = (v_e k^2) / \partial_{\tilde{y}}^2 v_e$ von der Krümmung $\partial_{\tilde{y}}^2 v_e$ des Geschwindigkeitsprofils $v_e(\tilde{y})$ abhängig. Bei positiver Krümmung ($\partial_{\tilde{y}}^2 v_e > 0$) von $v_e(\tilde{y})$ wird der Betrag der Diagonal-Elemente von $\underline{\underline{S}}$ (1.7) durch den Beitrag von $\bar{\mathcal{F}}$ erhöht. Dahingegen reduziert eine negative Krümmung ($\partial_{\tilde{y}}^2 v_e < 0$) von $v_e(\tilde{y})$ den Betrag der Komponenten $\underline{\underline{S}} \underline{\underline{\delta}}$.

Unter der Voraussetzung, dass der seegangsinduzierte Impuls \underline{v}_{sd} von der Erdrotation unabhängig ist, kann der Coriolis-Term $2 \underline{\Omega}_\oplus \times \rho \underline{v}_{sd}$ vernachlässigt werden. Die Massenbilanzgleichung (1.3) der mittleren Strömung $\langle \underline{v} \rangle = \underline{v}_e + \underline{v}_{sd}$ behält ihre Form bei. Betrachtet man die phasengemittelte Hydrodynamik, so führt die Energie der sich brechenden Wellen im Wesentlichen zu zwei Effekten. Die kinetische Energie $T \sim |\langle \underline{v} \rangle|^2$ der mittleren Strömung wird erhöht und durch den Brandungstau im küstennahen Raum die potentielle Energie $V \sim \rho g s(\zeta)$ des Wasserkörpers vergrößert.

Wird der Ansatz linearer Wellen $\delta^{(1)} \underline{v} = \underline{v}^{(1)} \exp i(\underline{k} \cdot \underline{\tilde{x}} - \sigma t)$ in Gleichung (1.7) eingesetzt, dann erhält der dreidimensionalen Radiationstress-Tensor in der Tiefe $h_e(1+\zeta)$ die folgende Form ($\bar{\mathcal{F}} = 0$).

$$\underline{\underline{S}} = E(\underline{x}, \underline{k}, t) \left\{ \left[\frac{\underline{k} \otimes \underline{k}}{k^2} + \underline{\underline{\delta}} \right] \frac{c_g \sinh(2kh_e(1+\zeta)) + 2kh_e(1+\zeta)}{c \sinh(2kh_e) + 2kh_e} - \underline{\underline{\delta}} \frac{\cosh(2kh_e(1+\zeta))}{4 \sinh^2(2kh_e)} \right\} \quad (1.8)$$

Die Wassertiefe h_e entspricht der Summe aus Topographischer Tiefe D und mittlerem Wasserstand $\hat{\eta}$. Zwischen dem Meeresgrund und der Wasseroberfläche variiert die Vertikal-Koordinate ζ zwischen $\zeta_{bot} = -1$ und $\zeta_{surf} = 0$. Bei der Herleitung von (1.8) wurde die Beziehung (1.7) vom Boden ($\zeta_1 = -1$) bis zur Position der ζ -Oberfläche ($-1 \leq \zeta_2 \leq 0$) integriert. Der so berechnete Impulsbeitrag des Seegangs zur mittleren Strömung ist spektral aufgelöst und muss noch über den Wellenzahlraum integriert werden.

Das folgende Kapitel behandelt die theoretischen Grundlagen der kanonischen und nicht-kanonischen Störungsrechnung aus den Kapiteln 3 und 5. Es wurde an dieser Stelle eingefügt, um die dort verwendeten Begriffe einzuführen. Beim ersten Durchlesen der Arbeit ist es wahrscheinlich einfacher gleich bis zum nächsten Kapitel 3 vorzublättern und nur im Fall aufkommender Fragen auf das Kapitel 2 zurückzukommen.

Kapitel 2

Symplektische Geometrie und Hamiltonsche Mechanik

In diesem Kapitel erfolgt eine kurze Einführung in die Grundlagen der symplektischen Geometrie und Hamiltonschen Mechanik. Nähere Einzelheiten zu diesen Themen und Beweise der Behauptungen sind in den beiden hervorragenden Büchern von V.I. Arnold [An89] und J.E.Marsden, T.S. Ratiu [AM99] zu finden. Im Gegensatz zum Rest der Arbeit werden Vektoren und Tensoren in diesem Kapitel durchgehend in der Komponentenschreibweise dargestellt.

Eine symplektische Form ω^\pm auf einer Mannigfaltigkeit \mathcal{M} (eine glatte Oberfläche, die lokal wie der \mathbb{R}^n aussieht) ist eine abgeschlossene, nicht ausgeartete 2-Form. Für alle Elemente ξ, η des Tangentialraums $T_m\mathcal{M}$ am Punkt m auf \mathcal{M} ist die äußere Ableitung $d\omega^\pm(\xi, \eta)$ gleich Null (abgeschlossen) und es existiert für alle $\xi \neq 0$ ein η , so dass $\omega^\pm(\xi, \eta) \neq 0$ ist (nicht ausgeartet). Die „natürliche“ symplektische Struktur lebt auf dem Kotangentialraum $T_m^*\mathcal{M}$ (Phasenraum) mit den Koordinaten $(q^i, p_i)_{i=1, \dots, n}$. Unter diesen Voraussetzungen ist die symplektische Form gleich

$$\omega^\pm(q^i, p_i)((\delta q_1, \delta p_1), (\delta q_2, \delta p_2)) = \delta p_2 \delta q_1 - \delta p_1 \cdot \delta q_2. \quad (2.1)$$

Die q^i sind generalisierte Koordinaten (Konfigurationsraum (q^i, \dot{q}^i)) und die p_i sind die generalisierten Impulse (Phasenraum (q^i, p_i)). Ein endlichdimensionales Hamiltonsches System ist durch den Phasenraum, d.h. eine symplektische Mannigfaltigkeit, und einer auf dem Kotangentenbündel $T^*\mathcal{M}$ definierten Funktion, der Hamiltonfunktion H , gegeben. In einem etwas allgemeineren Sinn ist H keine Funktion, sondern ein Energiefunktional. Das ist eine nicht-lokale Funktion, die von der räumlichen Verteilung aller dynamischen Variablen abhängt. Diese Eigenschaft von H lässt sich aus dem Hamilton-Prinzip (2.2) ableiten.

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} [\langle \dot{q}^i, p_i \rangle - H(q^i, p_i)] dt = 0 \quad (2.2)$$

In Gleichung (2.2) kennzeichnet $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die Paarung des Konfigurationsraums mit seinem Dualraum und \dot{q}^i ist gleich $\dot{q}^i = dq^i/dt$. Die Gleichung (2.2) ist für alle Variationen der Kurven $c(t) = (q^i(t), p_i(t))$ im Phasenraum mit festem q^i an den Endpunkten gültig, wenn $c(t)$ die Hamiltonschen Gleichungen erfüllt. Für ein gegebenes Lagrangeunktional $L(q^i, \dot{q}^i) = \langle \dot{q}^i, p_i \rangle + H(q^i, p_i)$ auf $T\mathcal{M}$ ist das Wirkungsfunktional $\int L dt$ unter Variationen von q^i und p_i entlang der Kurve $c(t)$ stationär. Nach dem Anwenden von $\delta \dot{q}^i = d(\delta q^i)/dt$ in Gleichung (2.2) und partieller Integration erhält man die

bekannten Hamiltonschen Gleichungen

$$\dot{q}^i = \frac{\delta H}{\delta p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\delta H}{\delta q^i}. \quad (2.3)$$

Der funktionale Charakter von H (Für zeitabhängige Felder $(q^i(t), p_i(t))$) macht die Einführung der Funktionalableitung (2.4) notwendig.

$$\left\langle \delta\mu, \frac{\delta H}{\delta\mu} \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \delta\mu \frac{\delta H}{\delta\mu} dx^3 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [H(\mu + \varepsilon\delta\mu) - H(\mu)]. \quad (2.4)$$

Die Hamiltonschen Gleichungen (2.3) können nun in der folgenden Weise hingeschrieben werden $dc(t)/dt = X_H(c(t)) = J \cdot \nabla H$, wobei X_H das Hamiltonsche Vektorfeld und J der schiefsymmetrische symplektische Tensor ist. Für einen $2n$ dimensionalen symplektischen Vektorraum $(\mathcal{M}, \omega^\pm)$ mit den kanonischen Koordinaten (q^i, p_i) ist das Hamiltonsche Vektorfeld gleich $X_H = (\delta H/\delta p_i, -\delta H/\delta q^i)$ und der Tensor $J_{(n,m)}$ entspricht $-\mathbb{1}$ für $(n, m) = (n+1 \dots 2n, 1 \dots n)$, $\mathbb{1}$ für $(n, m) = (1 \dots n, n+1 \dots 2n)$ und $\mathbb{0}$ sonst ($\mathbb{1}$ ist die $n \times n$ Einheitsmatrix). Bei einem ungerade dimensionalen Vektorraum $(\mathcal{M}, \omega^\pm)$ mit nicht-kanonischen Koordinaten (ν^i, π_i) besitzen die Evolutionsgleichungen nicht die Standardform (2.3). Sowohl der symplektische Tensor J als auch die symplektische 2-Form ω^\pm unterscheiden sich von ihren kanonischen Entsprechungen. Ein Vektorfeld $X_H(\nu^i, \pi_i)$ auf \mathcal{M} ist aber immer noch Hamiltonisch wenn

$$dH(\nu^i, \pi_i) \cdot v_{(\nu^i, \pi_i)} = \omega^\pm(\nu^i, \pi_i)(X_H(\nu^i, \pi_i), v_{(\nu^i, \pi_i)}), \quad v_{(\nu^i, \pi_i)} = \dot{c}(t). \quad (2.5)$$

Die Hamiltonschen Gleichungen entsprechen dem durch X_H gegebenen Satz von Differentialgleichungen. Der Fluss von X_H beschreibt die zeitliche Entwicklung des Systems und ist gleich dem Satz von Abbildungen $\varphi_t : Z \rightarrow Z$, des Phasenraums Z auf sich selbst. Die ausgezeichneten Abbildungen φ_t erfüllen die Hamiltonschen Gleichung (2.6).

$$\left. \frac{d\varphi_t}{dt} \right|_{t=0} = X_H(\varphi_t) = J_{ij}(\mu) \frac{\delta H}{\delta \mu_j}, \quad \varepsilon_{ijk} J_{im} \frac{\partial J_{ik}}{\partial \mu_m} = 0, \quad (2.6)$$

In dieser Gleichung kennzeichnet $\mu_m = (\nu^m, \pi_m)$ den dynamischen Vektor, eine Gruppierung aller dynamischen Variablen zu einem Vektor. Der schiefsymmetrische, ko-symplektische Tensor J_{ik} erfüllt die Jacobi Bedingung (2.6b). Wenn J_{ij} invertierbar ist, dann ist das Gleichungssystem (2.6) zu den kanonischen Hamiltonschen Gleichungen (2.3) äquivalent. Oft aber ist dies nicht der Fall. Dann ist J_{ij} singulär und nur durch Einführen von Lagrange-„labels“ oder Clebsch-Potentialen kann eine kanonische Beschreibung des Systems gefunden werden.

Es ist eine der elementarsten Aussagen der Hamiltonschen Mechanik, dass die symplektische Struktur ω^\pm unter dem Hamiltonischen Fluss φ_t erhalten bleibt ($\omega^\pm \circ \varphi_t = \omega^\pm$). Dies führt zu einer alternativen Formulierung der Hamiltonschen Dynamik auf $(\mathcal{M}, \omega^\pm)$. Für zwei beliebige Funktionen $F, H : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ auf \mathcal{M} kann eine bilineare, schiefsymmetrische Klammer $\{\cdot, \cdot\}$ definiert werden, welche gleich der Ableitung von F in Richtung des Hamiltonschen Flusses ist, wenn H ein Hamiltonfunktional ist. Solche Klammern, auch Poisson Klammern genannt, entsprechen Abbildungen von $\mathcal{F}(\mathcal{M})$, dem Raum der glatten Funktionen auf \mathcal{M} , nach $\mathcal{F}(\mathcal{M})$.

$$\{F, H\} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F(\varphi_t(x)), \quad (x \in \mathcal{M}) \quad (2.7)$$

Beispiel: Unter Verwendung der kanonischen Poisson Klammer $\{F, H\} = \partial_{q^i} F \partial_{p_i} H - \partial_{q^i} H \partial_{p_i} F$ kann Gleichung (2.3) umgeformt werden zu $\dot{c} = \{c, H\}$ mit $c = (q^i, p_i)$.

In der hier verwendeten Notation wird die zeitliche Entwicklung von $F \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$ durch Gleichung (2.8) festgelegt.

$$\{F, H\} = \frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \mu_i} \frac{\partial \mu_i}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial \mu_i} J_{ij} \frac{\delta H}{\delta \mu_j} \quad (2.8)$$

Eine direkte Konsequenz der Schiefsymmetrie von J ist, dass H eine Erhaltungsgröße der Bewegung ist (eqn.(2.8) mit $F = H$). Im Allgemeinen entspricht H der Gesamtenergie des Systems. Von allen Erhaltungssätzen der klassischen Mechanik ist die Energieerhaltung wohl das bekannteste Beispiel. Wenn das Hamiltonfunktional H sich entlang der Trajektorien Hamiltonscher Dynamik zeitlich nicht ändert, dann nennt man das System von Differentialgleichungen (2.8) auch autonom. Kanonische Koordinatentransformationen Ξ , welche die kanonischen dynamischen Gleichungen (2.3) in autonome Gleichungen überführen sind von großer Bedeutung für die Hamilton-Jacobi Theorie.

Wenn das Funktional H unter Translation in x -Richtung invariant ist oder eine andere kontinuierliche Symmetrie besitzt, dann existiert ein zeitinvariantes Funktional M , das die Gleichung (2.9b) des Noether-Theorems erfüllt.

$$H(\mu(x + \Delta)) = H(\mu(x)) , \quad J_{ij} \frac{\delta M}{\delta \mu_j} = -(\mu_i)_x \quad (2.9)$$

Gleichung (2.9) ist das Produkt der Schiefsymmetrie von J_{ij} und der Tatsache, dass die Funktionalableitung von H in Richtung einer kontinuierlichen Symmetrie verschwindet. Die Erhaltung der Energie folgt aus der Zeitinvarianz von H ($x = t$). Wenn x dahingegen eine räumliche Koordinate ist, dann entspricht M der zur Symmetrie gehörenden Impulsinvarianten. Ein weiteres Beispiel ist die adiabatische Erhaltung der Größe Wellenwirkung I_k . Wenn das Hamiltonfunktional $H(\vartheta^k + 2\pi \hat{e}_i, I_k, t) = H(\vartheta^k, I_k, t)$ mit \hat{e}_i , dem i -ten Basisvektor, invariant ist, unter Änderung des Phasenwinkels ϑ^k , dann ist die Wellenwirkung I_k eine Erhaltungsgröße. Dafür muss aber zumindest gewährleistet sein, dass H sich über eine Periode hinweg nicht ändert. Aus diesem Grund bezeichnet man die Größe Wellenwirkung I_k oft auch als adiabatische Invariante.

$$0 = \frac{dH}{d\vartheta^k} = \frac{1}{\sigma_k} \frac{dH}{dt} + \frac{\delta H}{\delta \mu_i} \frac{\partial \mu_i}{\partial \vartheta^k} = \frac{\partial I_k}{\partial t} + \frac{I_k}{\sigma_k} \frac{\partial \sigma_k}{\partial t} + J_{ij}^{-1} \frac{\partial \mu_i}{\partial t} J_{ij} \frac{\delta I_k}{\delta \mu_i} = \frac{dI_k}{dt} \quad (2.10)$$

Bei der Herleitung dieser Gleichung wurde vorausgesetzt, dass die intrinsische Frequenz σ_k explizit zeitunabhängig ist $\partial \sigma_k / \partial t = 0$.

Die Struktur der Hamiltonschen Gleichungen wird im Wesentlichen durch die mathematischen Eigenschaften des symplektischen Tensors J_{ij} bestimmt. Eine grundsätzliche Unterscheidung erfolgt zwischen kanonischen Systemen mit einem nichtsingulären Tensor J_{ij} und singulären nicht-kanonischen Systemen. Wenn J_{ij} singulär ist, die Determinante von J_{ij} also verschwindet, dann besitzt das System zusätzliche Symmetrien. In diesem Fall bestimmen Casimirfunktionen C die Topologie der Mannigfaltigkeit \mathcal{M} , auf der sich die Hamiltonsche Dynamik entwickelt. In der hier verwendeten Notation sind die Funktionen C Lösungen der Gleichung (2.11).

$$J_{ij} \frac{\delta C}{\delta \mu_j} = 0 \quad (2.11)$$

Die Gleichung (2.11) entspricht der Version des Noether-Theorems (2.9) mit $(\mu_i)_x = 0$ (u_i homogen). Zusätzlich zu den durch das Noether-Theorem gegebenen Erhaltungsgrößen $(\mu_i)_x \neq 0$ existieren also noch Casimir Invarianten $C \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$ der Bewegung. Diese Funktionen sind Erste Integrale des Hamiltonschen Flusses φ_t im Phasenraum. Aus Gleichung (2.11) und (2.8) folgt, dass die Poisson Klammer ($\{C, G\} = 0$) für zwei beliebige Funktionen $C, G \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$ verschwindet, wenn C eine Casimirfunktion ist. Da diese Bedingung natürlich auch für alle Hamiltonfunktionen H erfüllt sein muss $\{C, H\} = 0$, ist die Funktion C selbst eine Erhaltungsgröße.

Bei der Untersuchung von Stabilitätseigenschaften des Zustandes μ_e geht man in der Regel dazu über, das Funktional auf der rechten Seite der Hamiltonschen Gleichung (2.6a) für $\mu = \mu_e$ auszuwerten $\partial_t \mu|_{\mu_e} = J_{ij}(\mu) \delta H / \delta \mu|_{\mu_e}$. Dabei entspricht μ_e dem ungestörten Gleichgewichtszustand des physikalischen Systems. Die Zeit-Unabhängigkeit von μ , i.a. das Verschwinden der linken Sfootnoteite dieser Gleichung, sichert aufgrund der möglichen Singularität von J_{ij} nicht die Extremalität des Hamiltonfunktionals H für $\mu = \mu_e$. Dafür ist es erforderlich eine ausgewählte Casimirfunktion C zu H zu addieren. Das als Pseudo-Energie bekannte Energiefunktional $H_C = H + C$ mit den Eigenschaften

$$\left. \frac{\delta H_C}{\delta \mu} \right|_{\mu_e} = \left. \frac{\delta H}{\delta \mu} \right|_{\mu_e} + \left. \frac{\delta C}{\delta \mu} \right|_{\mu_e} = 0, \quad \frac{\delta^2 H_C}{\delta \mu^2} \text{ positiv (negativ) definit} \quad (2.12)$$

ist nach Definition eine Erhaltungsgröße, da sowohl H als auch C es sind, und ist in niedrigster Ordnung quadratisch in der Störungsamplitude. Diese beiden Eigenschaften haben H_{can} , die kanonische Hamiltonfunktion, und H_C gemeinsam. Deshalb kann die Pseudo-Energie dazu verwendet werden, eine Stabilitäts-Norm im Sinne von Liapunov für den Zustand μ_e zu konstruieren.

Eine Möglichkeit, die Dynamik nicht-kanonischer Systeme zu beschreiben, ist die Transformation der Differentialgleichungen auf äquivalente Gleichungen, die auf Lie-Algebren \mathfrak{g} leben. Lie-Algebren haben die angenehme Eigenschaft Vektorräume ($\mathbb{V} = T^*\mathbb{V}$) zu sein, auf denen eine bilineare, schiefsymmetrische Klammer $[\xi, \eta]$, ($\xi, \eta, \zeta \in \mathfrak{g}$) definiert ist, welche die Jacobi Identität $[[\xi, \eta], \zeta] + [[\zeta, \xi], \eta] + [[\eta, \zeta], \xi] = 0$ erfüllt. Diese Identität sagt uns, dass lokal auf \mathcal{M} kanonische Koordinaten existieren. Die oben eingeführte Poisson Klammer lässt sich nun unter Verwendung der Funktionalableitung (2.4) auf Lie-Algebren verallgemeinern. Die Funktionalableitung von $F \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$ am Punkt $\mu \in \mathfrak{g}^*$ ist das eindeutig bestimmte Element $\delta F / \delta \mu \in \mathfrak{g}$. Der n -Tupel μ ist eine Zusammenfassung aller raum- und zeitabhängigen dynamischen Variablen des physikalischen Systems. In diesem Fall sind \mathfrak{g} , \mathfrak{g}^* geeignete Vektorräume und die (\pm) Lie-Poisson Klammer ist für $F, G \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$ durch Gleichung (2.13) gegeben.

$$\{F, G\} = \pm \left\langle \mu, \left[\frac{\delta F}{\delta \mu}, \frac{\delta G}{\delta \mu} \right] \right\rangle \quad (2.13)$$

Die nicht-ausgeartete Paarung der Lie Algebra \mathfrak{g} mit ihrer dualen Algebra \mathfrak{g}^* ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ ist die Jacobi Klammer. Das Duale einer Lie-Algebra ist eine bezüglich der oben definierten Lie-Poisson Klammer (2.13) gegebene Poisson Mannigfaltigkeit $(\mathcal{P}, \{ \cdot, \cdot \})$. (Beispiel Fester Körper: $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist das Skalarprodukt und $[\cdot, \cdot]$ ist das Kreuzprodukt.)

Die Lie-Poisson Klammer (2.13) ist eine der wichtigsten nicht-kanonischen Klammern. Sie kann aus der kanonischen Klammer mit Hilfe der Methode der Reduktion hergeleitet werden. Ein weiterer Weg ist die direkte Konstruktion der Lie-Poisson Klammern aus der Lie-Algebra beziehungsweise dem (semidirekten) Produkt von Lie-Algebren mit der Methode der Erweiterung. (Das direkte Produkt von Lie Algebren führt zu einer Summe von n unabhängigen Poisson Klammern und ist daher nicht anwendbar.)

Zu jeder durch die Lie-Algebra Klammer generierten infinitesimalen Symmetrie-Transformation existiert eine Erhaltungsgröße. Das ist die Aussage des Noether-Theorems. Beispiel: Für eine Symmetrie in x -Richtung ($\underline{x} \in \mathbb{R}^2$) kann aus den Gleichungen für eine zweidimensionale, inkompressible Strömung $d\omega/dt = 0$ (Vorticity $\omega = -\nabla^2 \psi$ mit Stromfunktion ψ , Kapitel 4.1) ein Ausdruck M_x für die x -Komponente des Kelvin-Impulses hergeleitet werden.

$$M_x(x, \omega) = \int_D y \omega d^2 \underline{x}, \quad \omega_i = \varepsilon_{ijk} \nabla_{x_j} v_k \quad (2.14)$$

Die beiden Komponenten des Kelvin-Impulses M_x und $M_y = -\int x \omega d^2 \underline{x}$ sind Invarianten der Bewegung. Der klassische Impuls $\int v d^2 \underline{x}$ kann aus (2.14) durch partielle Integration der Gleichungen

hergeleitet werden.

Lie-Poisson Systeme lassen Sphären in dem durch (M_x, M_y) definierten \underline{M} -Raum unverändert $d\|\underline{M}\|^2/dt = 0$. Eine Verallgemeinerung dieser Objekte auf beliebige Lie-Algebren wird koadjungierter Orbit genannt. Ein solcher Orbit ist eine Submannigfaltigkeit in \mathfrak{g}^* mit der Eigenschaft von jedem Lie-Poisson System $\dot{F} = \{F, H\}$ unbeeinflusst zu bleiben. Wie sich herausstellt sind koadjungierte Orbits \mathcal{O} ebenfalls Poisson Mannigfaltigkeiten $(\mathcal{P}, \{\cdot, \cdot\})$. Das ist eine Mannigfaltigkeiten \mathcal{P} zusammen mit einer Poisson Klammer $\{F, H\}$ für die Funktionale $F, H : \mathcal{F}(\mathcal{P}) \rightarrow \mathbb{R}$. Wenn die Lie-Gruppe endlich dimensional ist, dann ist die Dimension der koadjungierten Orbits geradzahlig und es ist möglich eine symplektische Struktur ω^\pm auf \mathcal{O} zu definieren $\omega^\pm(\mu)(\xi_{\mathfrak{g}^*}(\mu), \eta_{\mathfrak{g}^*}(\mu)) = \pm \langle \mu, [\xi, \eta] \rangle$. In dieser Gleichung ist $\mu \in \mathcal{O}$ und $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$. Die infinitesimalen Erzeugenden $\xi_{\mathfrak{g}^*}, \eta_{\mathfrak{g}^*}$ der koadjungierten Wirkung sind durch $\xi_{\mathfrak{g}^*}(\mu) = -ad_\xi^* \mu$ und $\eta_{\mathfrak{g}^*}(\mu) = -ad_\eta^* \mu$ gegeben. Hier ist $ad_\xi^* \mu$ die zur Lie-Algebra Wirkung $ad_\xi(\eta)$ duale Wirkung. Sie lässt sich durch Differentiation der Identität $\langle \mu(t), \eta \rangle$ nach $t \in \mathbb{R}$ am Zeitpunkt $t = 0$ herleiten, wobei $\mu(t)$ die Kurve $\mu(t) = Ad_{g(t)-1}^* \mu$ in \mathcal{O} ist. In dieser Gleichung bezeichnet $Ad_{g(t)-1}^* \mu$ die koadjungierte Wirkung des Lie-Gruppenelements g auf $\mu \in \mathcal{O}$. Wenn eine Abbildung von $\mathcal{P} = T\mathcal{M}$ nach \mathfrak{g}^* , dem Dualen der Lie-Algebra \mathfrak{g} , existiert $(M : \mathcal{P} \rightarrow \mathfrak{g}^*)$ und die durch $\xi \in \mathfrak{g}$ erzeugte infinitesimale Bewegung dem Hamiltonschen Vektorfeld der skalaren Funktion $M_\xi(v^m) := M(v^m) \cdot \xi$ entspricht

$$X_{M_\xi}(v^m) = \xi_{\mathcal{P}}(v^m) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} T_m \varphi_t(v^m), \quad (t \in \mathbb{R}, m \in \mathcal{M}, v^m \in \mathcal{P}), \quad (2.15)$$

dann ist M die zur Wirkung der Lie-Gruppe G auf \mathcal{M} gehörende Impuls-Abbildung (engl. momentum map) und φ_t ist der Fluss der infinitesimalen Erzeugenden $\xi_{\mathcal{M}}(m)$. Beispiele für Impuls-Abbildungen sind Drehimpuls und „geradliniger“ Impuls für kontinuierliche Rotations- und Translations-Symmetrien in $T^*\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Für das von uns betrachtete Beispiel

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = J \frac{\delta H}{\delta \omega} \quad \text{mit} \quad J = -\partial(\omega, \cdot) \quad \text{und} \quad H(\psi) = \frac{1}{2} \int_D |\nabla \psi|^2 d^2 \underline{x} \quad (2.16)$$

eines inkompressiblen (2-D) Fluids ist die auf das Kotangentenbündel gehobene \mathbb{R}^3 -Wirkung auf Elemente \underline{x}^n des \mathbb{R}^{3N} (N Teilchen System) gleich $\Delta \cdot (\underline{x}^n) = (\underline{x}^n + \Delta)$ und der infinitesimale Generator ¹ ist $\xi_{\mathbb{R}^{3N}}(\omega(\underline{x}^n)) = -(\omega_{x_i} \xi, \dots, \omega_{x_i} \xi)$ (N -mal). Für eine Abbildung $M(\xi)$ ist nach Gleichung (2.16) das Hamiltonschen Vektorfeld $X_{M(\xi)}$ durch $X_{M(\xi)}(\omega) = -\partial(\omega, \partial M(\xi)/\partial \omega)$ gegeben, wobei $\partial(a, b) = a_x b_y - a_y b_x$ der (2-D) Jacobi-Operator ist. Es wird nun vorausgesetzt, dass eine kontinuierliche Symmetrie in Richtung der x -Koordinate vorliegt und $\omega_x \neq 0$ beziehungsweise $\omega_y = 0$ ist. Der Vergleich $X_{M(\xi)} = \xi_{\mathbb{R}^{3N}}$ liefert dann für $M(\xi) = \mathbf{M} \cdot \xi$ die folgende Gleichung $(\partial M(\xi)/\partial \omega)_y = \xi$. Letztendlich erhält man nach Integration der Gleichung das folgende Ergebnis $M_x(\xi)(\omega) = \int \omega y d^2 \underline{x} \cdot \xi$, was äquivalent zu Gleichung (2.14) ist. Auf die gleiche Weise kann für ein y -symmetrisches Problem $M_y(\xi)(\omega) = -\int \omega x d^2 \underline{x}$ hergeleitet werden. Eine mögliche Symmetrie in Richtung der Winkel-Koordinaten $\Delta \cdot (\vartheta^n) = (\vartheta^n + \Delta)$ führt, nach Transformation von $J = \partial(\omega, \cdot)$ in sphärische Koordinaten, zu einer Erhaltungsgleichung für den Drehimpuls $M_\vartheta(\xi)(\omega) = \int \omega r^2 d^2 \underline{x}$.

Alle Impuls-Abbildungen sind stets bis auf additive Casimirfunktionen C gegeben, von denen die Poisson-Mannigfaltigkeit ja unbeeinflusst bleibt. Solche durch die Lie-Poisson Klammer $\{C, \cdot\} = 0$ gegebenen Funktionen $C : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathbb{R}$ sind durch ihre Invarianz unter der koadjungierten Wirkung der Lie-Gruppe \mathcal{G} gekennzeichnet. Für ein beliebiges $g \in \mathcal{G}$ und $\mu \in \mathfrak{g}^*$ muss daher gegeben sein, dass $C(Ad_{g^{-1}}(\mu)) = C(\mu)$ ist. Nach Differentiation dieser Gleichung nach g in Richtung von $\xi \in \mathfrak{g}$

¹Der zur Wirkung von $\xi \in \mathfrak{g}$ auf \mathbb{R}^{3N} gehörende infinitesimale Generator $\xi_{\mathbb{R}^{3N}}$ ist gleich der nach $g \in \mathcal{G}$ abgeleiteten \mathbb{R} -Wirkung in Richtung von ξ an der Identität. Nach Definition der exponentiellen Abbildung $(exp : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{G})$ ist für $t \in \mathbb{R}$ gegeben das $\xi_{\mathbb{R}^{3N}} = -\left. \frac{d}{dt} [\omega(\Delta \cdot (\underline{x}^n))_{\Delta=exp\{t\xi\}}] \right|_{t=0}$.

an der Identität $g = e$ ergibt sich als alternative Bedingung dafür, dass C eine Casimirfunktion ist $ad_{\delta C/\delta \mu}^* \mu = 0$. Für das in Kapitel (4.1) behandelte Beispiel (2.16) werden nun alle möglichen Casimirfunktionen aus der Lie-Poisson Klammer abgeleitet.

$$\begin{aligned} \{C, F\} &= \pm \left\langle \omega, \left[\frac{\delta C}{\delta \omega}, \frac{\delta F}{\delta \omega} \right] \right\rangle \\ &= \pm \int_{\mathcal{D}} \omega \cdot \left(\frac{\delta C}{\delta \omega} \right)_x \left(\frac{\delta F}{\delta \omega} \right)_y d^2 \underline{x} \mp \int_{\mathcal{D}} \omega \cdot \left(\frac{\delta C}{\delta \omega} \right)_y \left(\frac{\delta F}{\delta \omega} \right)_x d^2 \underline{x} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Die zwischen \mathfrak{g} und \mathfrak{g}^* existierende Bilinearform ist durch das Skalarprodukt $\langle a, b \rangle = \int a \cdot b d^2 \underline{x}$ und die Lie-Algebra Klammer durch $[a, b] = \partial(a, b)$ gegeben. Alle Funktionen $C(\omega)$, die explizit unabhängig von $\underline{x} = (x, y)^T$ sind, kommen nach Gleichung (2.17) als Kandidat für eine Casimirfunktion in Frage. Speziell für $C(\omega) = \omega$ ist damit gegeben, dass die potentielle Vorticity ω eine Casimirfunktion und damit keine auf eine infinitesimale Symmetrie von Massenpunkten (Partikeln) zurückführbare Erhaltungsgröße, wie zum Beispiel Energie und Impuls ist. Die Invarianz von ω beruht auf der Symmetrie der Abbildung von Lagrangian zu Eulerschen Koordinaten. Der Übergang von materiellen Koordinaten (Partikel labels) zu räumlichen Feldern beinhaltet eine zusätzliche Symmetrie, die „particle relabeling“-Symmetrie, welche im ursprünglichen Partikelbild nicht sichtbar gewesen war. Für ein stationäres Strömungsfeld ist die Trajektorie eines beliebigen Fluid-Partikels dadurch ausgezeichnet, dass alle Partikel die sich zu einem Zeitpunkt t_0 auf dieser Trajektorie befinden, sich auch für alle Zeiten $t > t_0$ auf ihr befinden werden. Solche Trajektorien sind durch die Casimirfunktionen C gekennzeichnet, z.B. $C = \int \mathcal{C}(\omega) d^2 \underline{x}$ für das Beispiel (2.16).

2.1 Koordinatensysteme und Bezeichnungen

In dieser Arbeit wird die Wechselwirkung von Seegang und Strömung durch Anwenden von Störungstheorie auf nichtkanonische Hamiltonsche Systeme (3.2) untersucht. Der Übergang vom Hamiltonfunktional $H(\mu)$ zum Funktional $H_C(\mu)$ erlaubt eine Separation der Gleichungen hinsichtlich der räumlichen und zeitlichen Skalen, auf denen sich die Dynamik des Gleichgewichtszustandes (Eulersche Strömung) μ_e und der Störung (Seegang) $\delta\mu$ vollzieht. Dies macht die Einführung verschiedener Koordinatensysteme für die jeweilige Ordnung der Störungsrechnung notwendig. In diesem Abschnitt werden die gewählten Bezeichnungen kurz aufgelistet. Es wird ein einfach zusammenhängender Bereich \mathcal{D} des \mathbb{R}^3 betrachtet, für den verschiedene Koordinatensysteme eingeführt werden können.

- (1.) Sei $\sum_1 = \{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ eine Basis von \mathcal{D} . Für das ursprüngliche hydrodynamische Gleichungssystem (3.2) besitzt der Ortsvektor $\underline{x} = \underline{x}_e + \delta\underline{x}$ die Koordinatendarstellung $\underline{x} = (x, y, z) = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$. Im Allgemeinen sind $x, y, z \in \mathbb{R}$ sphärische Koordinaten.
- (2.) Die Vektoren $\sum_2 = \{\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}\}$ bilden eine Orthonormal-Basis von $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$. Sowohl der Ortsvektor $\tilde{x} = \delta\underline{x}$ des Seegangs als auch der Ortsvektor $\underline{X} = \delta\underline{x}/\varepsilon$ des phasengemittelten Seegangs lassen sich mit $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \varepsilon(X, Y, Z)$ als Linearkombination der $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \in \mathcal{D}$ darstellen ($\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \ll 1$). Im Allgemeinen sind $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \in \mathbb{R}$ und $X, Y, Z \in \mathbb{R}$ kartesische Koordinaten.
- (3.) Die Orthonormal-Basis $\sum_3 = \{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}$ von $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$ gestattet es den Ortsvektor \underline{x}_e in Eulerschen Koordinaten als Linearkombination der Vektoren $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathcal{D}$ darzustellen. Im Allgemeinen sind $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{R}$ sphärische Koordinaten.

Kapitel 3

Die Nicht-Kanonische Theorie

In dieser Arbeit werden Ergebnisse vorgestellt, die auf der Anwendung der von Arnold in [Arn65a] und [An66b] vorgestellten Methode auf Geohydrodynamische Probleme basieren. Diese, mittlerweile als Energie-Casimir -oder auch Arnold-Methode bekannte Technik, gestattet es, die Stabilität eines Hydrodynamischen Flusses zu untersuchen, ohne die entsprechenden dynamischen Gleichungen vorher linearisieren zu müssen. Die Möglichkeit ein von den dynamischen Größen abhängiges Phasenraum-Funktional H_C zu definieren, das eine Erhaltungsgröße ist und den Stationären Fluss als Extremum aufweist führt zur Formulierung eines Kriteriums für formale Stabilität. Der Fluss ist in dem Fall stabil, wo das Extremum entweder ein echtes Maximum oder aber ein echtes Minimum ist, nicht aber ein Sattelpunkt. Dahinter steckt die geometrische Veranschaulichung, dass bei einem vorzeichendefiniten Extremum jeder stationäre Punkt im Phasenraum von einem Satz in sich geschlossener und ineinander, quasi wie Zwiebelschalen, eingebetteter Unterräume umgeben ist, auf denen ein zum Zeitpunkt $t = t_0$ gestörtes System für alle Zeiten verharret. Jeder dieser k -Unterräume wird von der zu ihm gehörenden Wirkungsvariable I_k charakterisiert.

Von Arnold [Arn65a] wurde der Spezialfall eines homogenen, zweidimensionalen Flusses in einem inkompressiblen Fluid (siehe Kapitel 4.1) untersucht. Die Existenz des Funktionals H_C folgt in diesem Fall aus der Invarianz der Größen Vorticity und Energie. Ein weiterer Spezialfall, für den die Vorticity eine Erhaltungsgröße darstellt, ist der unidirektionale Fluss. Da der Geschwindigkeits-Gradient $\nabla \underline{v}$ stets senkrecht auf dem Vorticity-Vektor $\underline{\omega}$ steht, hat die Vektorgleichung $d\underline{\omega}/dt = \underline{q} \cdot \nabla \underline{v} = \underline{0}$ den Charakter einer Erhaltungsgleichung (Barokline- und Reibungseffekte werden vernachlässigt). Im ungleich komplizierteren Fall einer dreidimensionalen Formulierung der Hydrodynamik ist die rechte Seite von Null verschieden und die Rotation des Geschwindigkeitsfeldes \underline{v} keine Invariante mehr (siehe z.B. [Ped87] Kap.2.). Da aber mit der Abbildung materieller (Lagrangian) Koordinaten $\underline{a} = (a, b, c)$ in räumliche Felder (Eulersche Beschreibung) $\underline{x} = (x, y, z)$ stets Symmetrien gegenüber „particle relabellings“ verbunden sind, wird es immer möglich sein, neben der Energie H (Zeit-Symmetrie) weitere Invarianten C der Bewegung zu finden. Die potentielle Vorticity q als Erhaltungsgröße ist mit „relabelings“ verknüpft, welche den Jacobi-Operator $J_{\underline{x}}(\underline{a}) = \partial(a, b, c)/\partial(x, y, z)$ unbeeinflusst lassen. Die Position eines Teilchens $\underline{x}_i(\tau) = \int \underline{x}(\underline{a}, \tau) \delta(\underline{a} - \underline{a}_i) d\underline{a}$ wird durch die Label-Koordinaten \underline{a}_i und die Zeit τ vollständig festgelegt. Im Spezialfall eines homogenen, flachen, mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $f/2$ um die vertikale \hat{z} -Achse rotierenden Fluid's (Kap.4.2) führt die Zuordnung $da db = d(Masse)/\rho$, wobei ρ die konstante Dichte des Fluids ist, nach Einführen der lokalen Wassertiefe $h(\underline{x})$ zu der Beziehung $da db = h(\underline{x}) dx dy$. Das Funktional H_C setzt sich in diesem Fall aus dem Hamiltonian H und der Casimirfunktion $C = \int_D h \mathcal{C}(q) d\underline{x}^2$ zusammen, wobei die Potentielle Vorticity q die Form $q = (\hat{z} \cdot \nabla \times \underline{v} + f)/h$ annimmt. Dabei ist $\mathcal{C}(q)$ eine

beliebige reellwertige Funktion von q . Für ein inhomogenes, uneingeschränkt tiefes Fluid, dessen Dichte ρ eine Funktion des Ortes \underline{x} ist ($\partial_t \rho + \underline{v} \cdot \nabla \rho = 0$), werden sowohl die potentielle Vorticity $q = \nabla \rho \cdot (\nabla \times \underline{v} + \underline{f})$ als auch das Casimirfunktional $C = \int_D \mathcal{C}(\rho, q) d\underline{x}^3$ dichteabhängig [Ab86]. Die Beziehung $d(\text{Masse}) = \rho dx dy dz + V d\rho$, wobei V das Volumen des betrachteten Fluidelements ist, führt zu $J_{\underline{x}}(\underline{a}) = 1 + V \rho^{-1} (d\rho/dV) = 1 + \rho^{-1} \nabla \rho \cdot \underline{x}$. In diesem Fall ist C keine Funktion der Tiefe h (1.Summand), hängt aber sowohl von q als auch von ρ ab (2.Summand).

Schon Arnold [Arn65b] und Dikii (1965) [Dik65b] kommen zu dem Schluss, dass für die hier vorgeschlagene Wahl von H_C die (formale) Stabilität des Flusses nicht garantiert werden kann. Im Allgemeinen ist in keiner Beschreibung der Hydrodynamik $\delta^2 H_C$, die zweite Variation des Funktionals H_C , vorzeichendefinit. In [Ab86] stellen Abarbanel et al. fest, dass konsistent dazu die Flüsse aller inkompressiblen, stratifizierten, idealen Fluids nichtlinear instabil gegenüber Dichteveränderungen innerhalb eines ausreichend hohen Wellenzahlbereichs sind. Ursachen dafür sind nichtlineare Effekte, wie resonante Wechselwirkung der Seegangsmodes oder Arnold-Diffusion. Die Indefinitheit von $\delta^2 H_C$, ausgewertet für die Gleichgewichtslösung μ_e , gilt sogar dann, wenn das linearisierte Problem ein rein imaginäres Spektrum besitzt (Spektrale Stabilität). Der sich auftuende Widerspruch zum Kriterium von Richardson, das Stabilität¹ in den Fällen voraussagt, wo die Richardson-Zahl kleiner als ein Viertel ist, liegt in den unterschiedlichen Begriffen für Stabilität begründet (Kap.1 [AM99]). In dieser Arbeit wird formale und damit auch spektrale Stabilität der Eulerschen Strömung vorausgesetzt.

Für die linearisierte Dynamik wurde von Ratiu [Ra82] eine Lie-Poisson Klammer hergeleitet (Holm et al. (1984) [Hol84]). Der Hamiltonian des linearisierten Problems $\delta^2 H_C(\mu_e)$ entspricht der zweiten Variation des Funktionals H_C , ausgewertet für die Gleichgewichtslösung μ_e . Er ist quadratisch in der Amplitude der Störung. Das Funktional H_C setzt sich aus der Hamilton-Funktion und weiteren Erhaltungsgrößen, wie z.B. Casimir Funktionen, der nichtlinearen Gleichungen zusammen. Daher ist die erste Variation des Funktionals $\delta H_C(\mu_e)$ gleich Null und $\delta^2 H_C(\mu_e)$ ist eine Invariante der linearisierten Dynamik.

In diesem Kapitel wird der Radiationstress S_{ij} unter Verwendung nicht-kanonischer Störungstheorie berechnet. Die langsam veränderliche Lösung μ_e der partiellen Differentialgleichungen wird mit der stationären Strömung in Eulerschen Koordinaten identifiziert. Dahingegen enthält die gemittelte Strömung $\langle \mu \rangle$ als gefilterter, auf großer räumlicher und zeitlicher Skala ablaufender Prozess, bereits den mittleren Beitrag des Seegangs. Nach Einführung der Zerlegung $\mu = \mu_e + \varepsilon \delta^{(1)} \mu + \varepsilon^2 \delta^{(2)} \mu + \dots$ und Entwicklung der dynamischen Gleichungen in eine Störungsreihe, wobei ε mit $\varepsilon \ll 1$ der Parameter der Entwicklung ist, lässt sich die zeitliche Entwicklung der Störung n -ter Ordnung $\delta^{(n)} \mu$ zur Gleichgewichtslösung μ_e untersuchen. Hier sei auf das Paper von Vaneste und Shepherd [VS98] verwiesen, wo mittels dieser Methode für nicht-kanonische Hamiltonsche Systeme eine Erhaltungsgleichung für die Größe Wellenwirkung I_k hergeleitet worden ist. Auf den Skalen der Strömung betrachtet, ist die zeitliche Entwicklung des Seegangs eng mit der adiabatischen Invarianz dieser Größe verknüpft. Im Gegensatz zu der in Kapitel 3.2.2 hergeleiteten Bilanzgleichung (3.39) wird die lokale Wirkungsrate $\partial I / \partial T$ bei der in [VS98] hergeleiteten Gleichung (3.1) ausschließlich durch die räumlichen Wirkungsflüsse $F_{\underline{X}} = \underline{c}_g I$ (Gruppengeschwindigkeit des Wellenzugs \underline{c}_g) balanciert.

$$\frac{\partial I}{\partial T} + \nabla_{\underline{X}} \cdot \underline{F}_{\underline{X}} = 0 \quad (3.1)$$

¹Der Begriff der Spektralen Stabilität basiert auf einer Linearisierung der zu untersuchenden Differentialgleichung $\dot{u} = X(u)$. Nach Einführung der Zerlegung $u = u_e + \delta u$, wobei $\delta u = e^{\lambda t} \delta u_0$ die Lösung der Eigenwertgleichung $X'(u_e) \cdot \delta u_0 = \lambda \delta u_0$ ist, erfolgt die Auswertung der Linearisierten Gleichung $(\dot{\delta u}) = X'(u_e) \cdot \delta u$ in der Nähe der Fixpunkte u_e . $X'(u_e)$ (Jacobi-Matrix) bezeichnet die Linearisierung von $X(u)$. Je nach den Eigenschaften der Eigenwerte λ unterscheidet man fünf Stabilitätsregime (stabiler-und instabiler Fokus, stabiler-und instabiler Knoten und Sattelpunkt). Ein stabiler Fokus ist durch $\lambda \in \mathbb{C}$; $Re(\lambda) < 0$ gekennzeichnet.

Nach Voraussetzung ist die Gleichgewichtslösung μ_e stabil und daher, auf den räumlichen und zeitlichen Skalen der Störung betrachtet, stationär. Der Übergang vom Hamiltonfunktional H zum Funktional H_C stellt eine Separation hinsichtlich der Skalen dar, auf denen sich die Dynamik der Lösung $\delta^{(n)}\mu$ vollzieht. Die lineare Wellentheorie ergibt sich als Lösung der ersten nicht trivialen Gleichung niedrigster (erster) Ordnung². Ein formaler Ausdruck für die Divergenz des Radiationstress-Tensors folgt aus den Störungstermen zweiter Ordnung. Für das wohl einfachste strömungsdynamische Beispiel, das eines zweidimensionalen, inkompressiblen Fluids, wird die Störungsanalyse in Kapitel (4.1) durchgeführt und der Divergenzterm des Radiationstress-Tensors berechnet. Anschließend wird in Kapitel (4.2) für den Fall eines zweidimensionalen Flusses in einem homogenen und flachen Gewässer der seegangsbedingte Strömungsantrieb bestimmt.

Das gekoppelte System Seegang-Strömung kann wie folgt verstanden werden. Durch äußeren Antrieb (Windinput, Dissipation, etc.) und nichtlineare Effekte wird die Orbitalbewegung der linearen Moden ständig gestört. Solange die Voraussetzungen für die adiabatische Invarianz von I gegeben ist (Gleichung (2.10)), führt eine Änderung der intrinsischen Frequenz σ zu einer spektralen Umverteilung von Energie. In Kapitel 5.2 wird gezeigt, dass der Betrag des Radiationstress-Tensor S_{ij} in diesem Fall ungleich Null ist. Ein inhomogenes Wellenfeld führt aufgrund der nichtverschwindenden Divergenz von S_{ij} zu einem zusätzlichen, seegangsinduzierten Antrieb der mittleren Strömung.

Wie in [VS98] wird die Entwicklung der hydrodynamischen Gleichungen unter der Annahme durchgeführt, dass eine richtungsabhängige Separation der räumlichen und zeitlichen Skalen (Kapitel(3.2)), auf denen die Prozesse verschiedener Ordnung in ε ablaufen, möglich ist³. In \underline{X} -Richtung, der Ausbreitungsrichtung des Seegangs, wird die Amplitude der Wellen $\delta\mu$ als langsam veränderlich und auf großen räumlichen Skalen variierend vorausgesetzt. Dahingegen läuft die Dynamik der Phase ϑ/ε auf den typischen räumlichen $\|\underline{\tilde{x}}\| = \varepsilon\|\underline{X}\|$ und zeitlichen $t = \varepsilon T$ Skalen ($\varepsilon \ll 1$) des Seegangs ab. Entlang der $\underline{\tilde{y}}$ -Koordinate des Orthogonalensystems $(\underline{\tilde{X}}, \underline{\tilde{y}})$ ist die Amplitude des Seegangs schnell veränderlich. Für μ kann daher ein *WKB*-Ansatz (Wenzel, Kramers, Brillouin) eingeführt werden (Gleichung (3.11), bzw. (3.12)). In jeder Ordnung n der Störungsanalyse ist $\delta^{(n)}\mu$ gleich dem Produkt eines langsam veränderlichen Faktors $\mu^{(n)}(\underline{\tilde{y}}, \underline{X}, T)$ und einer schnell oszillierenden Funktion $\exp(i\vartheta(\underline{X}, T)/\varepsilon)$.

3.1 Stabilitätsanalyse

Das Kapitel beginnt mit einer kurzen Wiederholung der verwendeten Begriffe. Auf der zu einer Lie-Algebra \mathfrak{g} , das ist ein Vektorraum zusammen mit einer schiefsymmetrischen (schieferhermiteschen) Klammer, welche die Jacobi Identität erfüllt, dualen Algebra \mathfrak{g}^* kann eine Lie-Poisson Klammer $\{F, H\}$ definiert werden, mit der sich die Bewegungsgleichungen $\dot{F} = \{F, H\}$ in der folgenden Form hinschreiben lassen.

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\}(\mu) = \left\langle \mu, \left[\frac{\delta F}{\delta \mu}, \frac{\delta H}{\delta \mu} \right] \right\rangle \quad (3.2)$$

Dabei ist $\mu \in \mathfrak{g}^*$, $\delta F/\delta \mu \in \mathfrak{g}$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine nur schwach degenerierte Zweiform. Die Jacobi-Lie Klammer $[a, b] = \mathcal{L}_a b \in \mathfrak{g}$ ist für ein ideales Fluid gegeben als $[v, w] = \sum (w^j (\partial v^i / \partial x^j) - v^j (\partial w^i / \partial x^j))$ und H ist das Hamiltonfunktional $H : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathbb{R}$. Eine alternative Fassung der Gleichung (3.2) ergibt

²Die Bilanzgleichung niedrigster Ordnung ($O(\varepsilon^0)$) nimmt durch den Übergang von H zu H_C ihre triviale Form $\dot{\mu}_e = 0$ an. Die Lösung $\mu_e = \text{konstant}$ enthält einen über viele Perioden gemittelten Beitrag des Seegangs

³Der ursprünglich von Bretherton (1968) ([Bre68]) stammende Ansatz zerlegt die räumlichen Koordinaten in „laterale“ \underline{x} und „longitudinale“ Koordinaten \underline{y} und setzt voraus, dass sich das Hamiltonfunktional H in \underline{x} -Richtung nur langsam ändert.

sich nach Einführen der koadjungierten, zu $\text{ad}(a) \cdot b = [a, b]$ dualen, Wirkung $\text{ad}(a)^*$.

$$\frac{d\mu}{dt} = -\text{ad} \left(\frac{\delta H}{\delta \mu} \right)^* \mu \quad (3.3)$$

Vorausgesetzt die Störung $\delta\mu$ ist klein gegenüber der Gleichgewichtslösung⁴ μ_e , dann kann der dynamische Vektor $\mu = \mu_e + \varepsilon\delta\mu$, von dem $H(\mu)$ abhängt, und damit auch $\delta H/\delta\mu$ in einer Taylor Reihe entwickelt werden. Ausgewertet am Gleichgewichts-Punkt $\mu = \mu_e$ im Phasenraum ($d/d\mu|_{\varepsilon=0}$) erhält man als Ergebnis

$$\frac{\delta H}{\delta \mu} = \frac{\delta H}{\delta \mu_e} + \varepsilon \left\langle \frac{\delta^2 H}{\delta \mu^2}, (\delta\mu, \delta\nu) \right\rangle + \varepsilon^2 \left\langle \frac{\delta^2}{\delta \mu^2} \left(\frac{\delta H}{\delta \mu} \right), (\delta\mu, \delta\mu, \delta\nu) \right\rangle + O(\alpha\varepsilon^3). \quad (3.4)$$

Dabei ist $\delta\mu = \delta^{(1)}\mu + \varepsilon\delta^{(2)}\mu + \dots$ und $\delta\nu \in \mathfrak{g}^*$ ist eine Dummy-Variable die sich aus der Definition der Funktionalableitung ergibt.

$$D(F)(\mu_e) \cdot \delta\mu = \left\langle \frac{\delta F}{\delta \mu}, \delta\mu \right\rangle. \quad (3.5)$$

Die Argumentation folgt zunächst Holm (1984) [Hol84]. Die Funktionalableitung $D(\delta H/\delta\mu)(\mu_e) \cdot \delta\mu$ ist das lineare Funktional $\delta\nu \in \mathfrak{g}^* \rightarrow \langle \delta^2 H/\delta\mu^2, (\delta\mu, \delta\nu) \rangle$. Daher kann mit $\delta^2 H = D^2 H(\mu_e) \cdot (\delta\mu, \delta\mu)$ der zweite Term in Gleichung (3.4) umgeschrieben werden zu

$$D \left(\frac{\delta H}{\delta \mu} \right) (\mu_e) \cdot \delta\mu = \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta(\delta\mu)} \left\langle \frac{\delta^2 H}{\delta \mu^2}, (\delta\mu, \delta\mu) \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{\delta(\delta^2 H)}{\delta(\delta\mu)}. \quad (3.6)$$

Entsprechendes gilt auch für den dritten Term in Gleichung (3.4), weshalb sich die Taylor-Reihe in der folgenden Form hinschreiben lässt

$$\frac{\delta H}{\delta \mu} = \frac{\delta H}{\delta \mu_e} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\delta(\delta^2 H)}{\delta(\delta\mu)} + \frac{\varepsilon^2}{3} \frac{\delta(\delta^3 H)}{\delta(\delta\mu)} + O(\varepsilon^3) = \frac{\delta H}{\delta \mu_e} + \sum_{l=2}^m \frac{\varepsilon^{l-1}}{l} \frac{\delta(\delta^l H)}{\delta(\delta\mu)}. \quad (3.7)$$

In diesem Kapitel werden nicht-kanonische Systeme behandelt, deren koadjungierte Lie- Algebrawirkung $\text{ad}(\boxplus)^*$ von den dynamischen Variablen μ abhängt. Als nächster Schritt wird deshalb auch $\text{ad}(\boxplus)^*$ in einer Taylor-Reihe entwickelt.

$$\begin{aligned} \text{ad}(\boxplus)^* \mu &= \text{ad}(\boxplus)^* \mu_e + \varepsilon \frac{\delta[\text{ad}(\boxplus)^* \mu]}{\delta \mu} \delta\mu + \varepsilon^2 \frac{\delta^2[\text{ad}(\boxplus)^* \mu]}{\delta \mu^2} \delta\mu^2 + O(\varepsilon^3) \\ &\equiv \text{ad}(\boxplus)^* \mu_e + \varepsilon (\delta \text{ad}(\boxplus)^* \mu + \text{ad}(\boxplus)^* \delta\mu) + \\ &\quad + \varepsilon^2 (\delta^2 \text{ad}(\boxplus)^* \mu + 2 \delta \text{ad}(\boxplus)^* \delta\mu) + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (3.8)$$

In dieser Gleichung kennzeichnet \boxplus die jeweiligen Terme von $\delta H/\delta\mu$ aus (3.7). Eingesetzt in die Lie-Poisson Gleichung (3.3) ergeben sich folgende nach ihrer Ordnung in ε geordneten Ausdrücke, welche die Dynamik der stationären $O(\varepsilon^0)$ und der linearisierten Strömung $O(\varepsilon^1)$ beschreiben sowie entsprechende Gleichungen für die nächsthöheren Ordnungen.

$$\frac{d\mu_e}{dt} = -\text{ad} \left(\frac{\delta H_C}{\delta \mu_e} \right)^* \mu_e = 0 \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^m \frac{\varepsilon^n}{\varepsilon} \frac{d(\delta^{(n)}\mu)}{dt} &= -\text{ad} \left(\sum_{n=2}^m \frac{\varepsilon^n}{n\varepsilon} \frac{\delta(\delta^n H_C)}{\delta(\delta\mu)} \right)^* \mu_e - \\ &- \delta \text{ad} \left(\sum_{n=2}^m \frac{\varepsilon^n}{n} \frac{\delta(\delta^n H_C)}{\delta(\delta\mu)} \right)^* \mu - \text{ad} \left(\sum_{n=2}^m \frac{\varepsilon^n}{n} \frac{\delta(\delta^n H_C)}{\delta(\delta\mu)} \right)^* \delta\mu - \\ &- \delta^2 \text{ad} \left(\sum_{n=2}^m \frac{\varepsilon^n \varepsilon}{n} \frac{\delta(\delta^n H_C)}{\delta(\delta\mu)} \right)^* \mu - 2 \delta \text{ad} \left(\sum_{n=2}^m \frac{\varepsilon^n \varepsilon}{n} \frac{\delta(\delta^n H_C)}{\delta(\delta\mu)} \right)^* \delta\mu \end{aligned} \quad (3.10)$$

⁴Um dies zu realisieren wird ein Faktor $\varepsilon \ll 1$ eingeführt

Der Schritt von Gleichung (3.7) und (3.8) zu (3.9) und (3.10) beinhaltet den Übergang vom Hamiltonfunktional H zu dem Funktional $H_C = H + C$ als zu variierende Größe. Die Erhaltungsgröße C ist die Summe von Casimir Funktionen und anderen Invarianten der Bewegung. Das Funktional $H_C = H + C$, bestehend aus der Hamiltonfunktion und dem Funktional C , besitzt die Eigenschaft für die Gleichgewichtslösung μ_e ausgewertet, extremal zu werden $\delta H_C / \delta \mu |_{\mu_e} = 0$.

Die beiden Gleichungen (3.9) und (3.10) bilden den Satz von Ausgangsgleichungen für die weitere Störungsanalyse. Dazu werden sie nach den auftretenden Ordnungen in ε sortiert. Dabei zeigt Gleichung (3.9) was vorausgesetzt worden ist. Die Gleichgewichtslösung μ_e ist stationär. Die linearisierte Dynamik ist Hamiltonisch bezüglich einer Poisson Klammer, die sich entsprechend Gleichung (3.10) (erste Zeile, $l = 2$) zu $\{G, H\}_1 = \langle \mu_e, [\delta G / \delta \mu, \delta H / \delta \mu] \rangle$ ergibt [Hol84]. Die Poisson Klammer erfüllt die Jacobi-Identität. Im Unterschied zu (4.4) ist der Koeffizient $\mu_e \in \mathfrak{g}^*$ konstant. Von Ratiu [Ra82] wurde gezeigt, dass $\{G, H\}_1$ eine Lie-Poisson Klammer ist. Die zur „Loop“-Algebra \mathfrak{g} gehörende duale Subalgebra \mathfrak{g}^* ist eine Lie-Algebra, welche die Poisson-Submannigfaltigkeit \mathcal{P}_w , auf der die linearisierte Dynamik stattfindet, definiert. Für ein System mit n Freiheitsgraden, dessen Trajektorien auf einem n -Torus liegen, formen die generierten koadjungierten Orbits der Lie-Gruppe \mathcal{G} Loops, welche den Fluss von \mathfrak{g}^* auf dem n -Torus kennzeichnen. Die Wirkungsvariable I_k , die sich aus der kanonischen Transformation der linearisierten Bewegungsgleichungen mit der Hamiltonfunktion $\delta^2 H_C$ (Gleichung (3.10)) ergibt, charakterisiert den Torus, auf dem sich die Orbits befinden.

Durch Ausnutzen der Eigenschaften der Jacobi-Lie Klammer lässt sich leicht nachprüfen, dass $\{G, H\}_2 = \langle \delta \mu, [\delta G / \delta \mu, \delta H / \delta \mu] \rangle$ ebenfalls die Jacobi-Identität erfüllt, und damit eine Lie-Poisson Klammer ist. Die Gleichung (3.10) zweiter Ordnung der Störungsreihe ist unter der Einschränkung der Linearität von $\delta H / \delta \mu$ Hamiltonisch. Sie beschreibt den Einfluss der Stokesdrift auf die Strömung. Durch die Entwicklung der Gleichung (3.3) bis zur zweiten Ordnung und höher ergeben sich Trajektorien der Fluidpartikel im Konfigurationsraum, die nicht länger geschlossen sein müssen. Im Rahmen dieser Arbeit gehen wir davon aus, dass auch das gestörte Problem integrabel ist. Dies ist eine Arbeitshypothese und daher nicht immer gegeben. Sie sichert aber, dass auch die Trajektorien des gestörten Systems ebenfalls auf einem $I_{k\text{Störung}}$ -Torus liegen. Wie aus Kapitel (1.2.2) bekannt ist, beschreibt die Stokes-Drift den nach Phasenmittelung residualen Anteil des Seegangs an der mittleren Strömung. Die $O(\varepsilon^2)$ -Anteile der Gleichung (3.10) enthalten deshalb die Divergenz des Radiationstress-Tensors ([LoS62]) als seegangsinduzierten Beitrag.

Nun noch einige Bemerkungen zu den Stabilitätseigenschaften des gekoppelten Systems Seegang-Strömung. Energie-Casimir Methode (Kapitel (2)): Die Gleichgewichtslösung μ_e ist formal stabil, solange die erste Variation von H_C ausgewertet bei μ_e verschwindet, und die zweite Variation Vorzeichen-Definit ist ($\delta^2 H_C(\mu_e)$ stets > 0 oder < 0). Damit definiert $\delta^2 H_C$ eine Norm im Raum der Störungen $\delta \mu$. Da $\delta^2 H_C$ ein Hamilton-Funktional und damit eine Konstante der Bewegung ist bleibt eine Lösung der Gleichungen (3.9), (3.10) die sich zum Zeitpunkt t_0 auf einer durch die Norm gegebenen Energiefläche (Sphäre) befunden hat für alle Zeiten t auf dieser (Liapunov Stabilität).

3.2 Die *WKB*-Lösung

In diesem Kapitel wird ein karthesisches Koordinatensystem zur Beschreibung der Wechselwirkung von Strömung und Seegang verwendet. Es sei $\sum_2 = \{\tilde{x}_i \mid i \in (1, 2)\}$ eine Orthonormal-Basis des 2-dimensionalen Ortsraumes und die Koordinatenachse \tilde{x}_1 stets parallel zur Richtung der Wellenausbreitung. Die Seegangsamplitude ändert sich in \tilde{x}_1 -Richtung auf räumlichen und zeitlichen Skalen (\underline{X}, T) , die viel größer sind als die Skalen der Phasendynamik. Deshalb ist es möglich, einen *WKB*-Ansatz für die Beschreibung des Seegangs einzuführen. (\underline{X}, T) kennzeichnet die Skalen des phasengemittelten Seegangs. In \tilde{x}_2 -Richtung ($\tilde{x}_2 = \tilde{y}$) hängt der Wellenansatz ausschließlich von den Skalen ($\tilde{y} = \varepsilon \underline{Y}, t = \varepsilon T$) des Seegangs $\delta\mu$ ($\varepsilon \ll 1$) ab.

Unter Verwendung der von Wenzel, Kramer und Brillouin eingeführten *WKB*-Methode⁵ werden analytische Lösungen des Systems von Differentialgleichungen (3.9), (3.10) ermittelt. Im allgemeinen Fall besitzen Wellen, die durch einen inhomogenen Ozean mit variierender Strömung und veränderlichen Wassertiefen propagieren, keine analytischen Eigenfunktionen. Nur für einige Spezialfälle lassen sich Lösungen angeben, ohne auf numerische Simulationstechniken zurückgreifen zu müssen. Wenn die Wellen aber durch ein Medium propagieren, das auf typischen räumlichen und zeitlichen Skalen (\underline{X}, T) variiert die viel größer als die Wellenlänge λ und die Periode π des Seegangs ($\lambda, \pi = \varepsilon(\|\underline{X}\|, T)$ ($\varepsilon \ll 1$)) sind, dann kann als Approximation für $\delta\mu$ eine *WKB*-Wellenfunktion angesetzt werden. Die Wellenzahl $k(\underline{X}) = k_0\eta(\underline{X})$ ist unter dieser Voraussetzung eine lokale, nur über den Refraktionsindex $\eta(\underline{X})$ vom Ort⁶ \underline{X} abhängige Funktion. Nicht explizit ortsabhängige Ansätze $\eta = \eta(\Lambda(\underline{X}))$ entsprechen daher Fouriemoden⁷. Hierbei kennzeichnet $\Lambda = (\Lambda_1(\underline{X}, T), \Lambda_2(\underline{X}, T), \dots)$ den Satz aller von \underline{X} und T explizit abhängigen Parameter. Die Wellenzahl \underline{k} und die Frequenz σ der *WKB*-Wellen sind durch $\underline{k}(\underline{X}, T) = \nabla_{\underline{X}}\Theta$ und $\sigma(\underline{X}, T) = -\partial\Theta/\partial T$ gegeben. Es gelten die bekannten Relationen: Die Divergenz $\nabla_{\underline{X}}\underline{k}$ ist symmetrisch $\nabla_{\underline{X}}\underline{k} = (\nabla_{\underline{X}}\underline{k})$ und $\partial\underline{k}/\partial t - \nabla_{\underline{X}}\sigma = 0$. Für das Gleichungssystem (3.9), (3.10) stellt der *WKB*-Ansatz eine Entwicklung der Störung $\delta\mu$ nach schnell oszillierenden periodischen Funktionen $\delta^{(n)}\mu$ dar, deren Amplitude $a^{(n)}$ sich auf den Skalen der mittleren Strömung ändert.

$$\delta\mu = \sum_{n=1}^m \varepsilon^n \delta^{(n)}\mu = \sum_{n=1}^m \varepsilon^n a^{(n)}(\underline{X}, T) e^{(i/\varepsilon)\Theta(\underline{X}, \tilde{y}, T)} + c.c. \quad (3.11)$$

Die eingeführte Abkürzung *c.c.* bezeichnet das komplex-konjugierte des vorigen Terms. Wie in [VS98] wird in Gleichung (3.11) eine Separation der Phasenfunktion $\Theta(\underline{X}, \tilde{y}, T) = \vartheta(\underline{X}, T) + \varepsilon\theta(\underline{k}, \tilde{y}, \Lambda)$ durchgeführt und die entstehenden Terme $a^{(n)}(\underline{X}, T)\exp(i\theta(\underline{k}, \tilde{y}, \Lambda))$ werden zu $\mu^{(n)}$ zusammengefasst. In Propagationsrichtung der Wellen $\tilde{x}_1 = \varepsilon\tilde{X}$ ist die Evolution der Phase durch $\vartheta(\underline{X}, T)$ gegeben. Dahingegen beschreibt $\Theta = \varepsilon\theta(\underline{k}, \tilde{y}, \Lambda)$ die Dynamik der Phase in Richtung des ($\tilde{x}_2 = \tilde{y}$)-Basisvektors. Nach Einsetzen des *WKB*-Ansatzes (3.12)

$$\delta\mu = \sum_{n=1}^m \varepsilon^n \mu^{(n)}(\tilde{y}, \underline{X}, T) e^{(i/\varepsilon)\vartheta(\underline{X}, T)} + c.c. \quad (3.12)$$

⁵Ursprünglich wurde die *WKB*-Methode von Lord Rayleigh (1912) entwickelt um die Propagation von optischen Störungen durch inhomogene Medien zu untersuchen.

⁶nicht aber von Gradienten $\nabla_{\underline{X}}(\cdot)$

⁷Phasenfunktion der Fouriemoden: $\Theta(\underline{X}) = \int_0^X k(\Lambda(\underline{X}', T')) d\underline{X}' - \int_0^T \sigma(\Lambda(\underline{X}', T')) dT' = kX - \sigma T$

in die Gleichung (3.10) (Gleichung (3.9) wird ausgelassen) und mehrfachem Anwenden der Produktregeln

$$\nabla_{\underline{X}} \delta^{(n)} \mu = \frac{\delta^{(n)} \mu}{\mu^{(n)}} \nabla_{\underline{X}} \mu^{(n)} + \frac{ik}{\varepsilon} \delta^{(n)} \mu =: \overline{\nabla}_{\underline{X}} \delta^{(n)} \mu + \frac{1}{\varepsilon} \widetilde{\nabla}_{\underline{X}} \delta^{(n)} \mu, \quad (3.13)$$

$$\frac{d}{dT} \delta^{(n)} \mu = \frac{\delta^{(n)} \mu}{\mu^{(n)}} \frac{\partial}{\partial T} \mu^{(n)} - \frac{i\sigma}{\varepsilon} \delta^{(n)} \mu \quad (3.14)$$

erhält man das folgende Gleichungssystem als Zwischenergebnis.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{m=2} \frac{\varepsilon^n}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \mu^{(n)}}{\partial T} \frac{\delta^{(n)} \mu}{\mu^{(n)}} - \frac{i\sigma}{\varepsilon} \delta^{(n)} \mu \right) &= -\frac{1}{\varepsilon} \widetilde{\text{ad}}(h_C \delta \mu)^* \mu_e - \overline{\text{ad}}(h_C \delta \mu)^* \mu_e - \\ &- \varepsilon \left(\frac{1}{\varepsilon} \delta \widetilde{\text{ad}}(h_C \delta \mu)^* \mu + \delta \overline{\text{ad}}(h_C \delta \mu)^* \mu + \frac{1}{\varepsilon} \widetilde{\text{ad}}(h_C \delta \mu)^* \delta \mu + \overline{\text{ad}}(h_C \delta \mu)^* \delta \mu \right) \\ &- \varepsilon^2 \left(\frac{1}{\varepsilon} \delta^2 \widetilde{\text{ad}}(h_C \delta \mu)^* \mu + \frac{2}{\varepsilon} \delta \widetilde{\text{ad}}(h_C \delta \mu)^* \delta \mu \right) + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Dabei wurde ausgenutzt, dass sich die Ableitungen wie folgt transformieren $\nabla_{\underline{X}} = \varepsilon \nabla_{\underline{x}}$, $d/dT = \varepsilon d/dt$ und die folgende Abkürzung

$$\sum_{n=2}^{m+1} \frac{\varepsilon^n}{n\varepsilon} \frac{\delta(\delta^n H_C)}{\delta(\delta \mu)} =: \sum_{n=1}^m \varepsilon^n h_C^{(n-1)} \delta \mu = \sum_{n=1}^m \sum_{(k \geq 0, l \geq 1, k+l=n)} \varepsilon^n h_c^{(k)} \delta^{(l)} \mu =: h_C \delta \mu \quad (3.16)$$

eingeführt. Da aus dem Kontext ersichtlich ist, ob gerade von $h_C^{(k)}$ oder h_C die Rede ist, wird um unnötige Schreibarbeit zu sparen für $k = 0$ auf eine Kennzeichnung der Ordnung (k) in $h_C^{(k)}$ verzichtet. Sowohl die hier betrachteten Funktionale H und C als auch die Klammer $ad(\cdot)^*$ sind explizit unabhängig von \underline{X} und T . Außerdem enthalten die zu differenzierenden Terme ausschließlich Funktionen $F(\mu)$ der dynamischen Größen⁸ μ . Die bei der Berechnung der koadjungierten Wirkung in beiden Eingängen zu bildenden Ableitungen sind, wie in Gleichung (3.13) und (3.14), durch gestreckte bzw. geschwungene (Tilde), Linien gekennzeichnet⁹ worden.

Das in Gleichung (3.15) eingeführte Funktional h_C ist ein Differentialoperator, der auf den dynamischen Zustandsvektor $\delta \mu$ des gestörten Systems wirkt¹⁰. Für ihn gelten die in (3.13) und (3.14) eingeführten Operator-Regeln. Die Störungsanalyse von (3.3) beinhaltet daher auch eine weiterführende Zerlegung der linken (LHS) und rechten Seite (RHS) von Gleichung (3.15) unter Verwendung der

⁸Die Funktionale H , C und die koadjungierte Wirkung $ad(\cdot)^*$ enthalten keine weiteren orts- und zeitabhängigen Funktionen.

⁹Wenn Ableitungen der Amplitude $\mu^{(n)}$ zu bilden sind, oder im Fall $F = F(\mu_e)$, dann ist dies mit $\overline{\text{ad}}$ abgekürzt worden, andernfalls, wenn die Phasenfunktion ϑ differenziert wird, mit $\widetilde{\text{ad}}$.

¹⁰Wie auch die koadjungierte Wirkung ad^* ist h_C ein Differentialoperator.

folgenden Beziehungen.

$$\begin{aligned} LHS(\text{eq}(3.15)) &= \sum_{n=1}^m \frac{\varepsilon^n}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \bar{\nabla} u^{(n)}}{\partial T} \frac{\delta^{(n)} u}{u^{(n)}} - \frac{i\sigma}{\varepsilon} \bar{\nabla} \delta^{(n)} u \right) + \\ &+ \sum_{n=1}^m \frac{\varepsilon^n}{\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u^{(n)}}{\partial T} \frac{\tilde{\nabla} \delta^{(n)} u}{u^{(n)}} - \frac{i\sigma}{\varepsilon^2} \tilde{\nabla} \delta^{(n)} u \right) \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} RHS(\text{eq}(3.15)) &: \\ \frac{1}{\varepsilon} \widetilde{\text{ad}}(h_C \delta u)^* u &= \sum_{n=1}^m \frac{\varepsilon^{n-1}}{\varepsilon} \left(\widetilde{\text{ad}}(\bar{h}_C^{(n-1)} \delta u)^* u + \frac{1}{\varepsilon} \widetilde{\text{ad}}(\tilde{h}_C^{(n)} \delta u)^* u \right) \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\overline{\text{ad}}(h_C \delta u)^* u = \sum_{n=1}^m \varepsilon^n \left(\overline{\text{ad}}(\bar{h}_C^{(n-1)} \delta u)^* u + \frac{1}{\varepsilon} \overline{\text{ad}}(\tilde{h}_C^{(n-1)} \delta u)^* u \right) \quad (3.19)$$

Der Wechsel in der Bezeichnung des Vektors der dynamischen Größen von $\mu(\dots, q, \dots)$ (Potentielle Vorticity q) zu $u(\dots, \underline{v}, \dots)$ kennzeichnet die Wahl des Eulerschen Geschwindigkeitsfeldes \underline{v} als neuen physikalischen Parameter. Die in Gleichung (3.17) eingeführten Operatoren $\bar{\nabla}$ und $\varepsilon^{-1} \tilde{\nabla}$ haben deshalb auch nicht die Bedeutung eines Gradienten des Geschwindigkeitsfeldes \underline{v} , sondern stehen für die bei der Berechnung der potentiellen Vorticity q auf \underline{v} wirkenden Ableitungsoperatoren¹¹.

3.2.1 Gleichung der Ordnung $O(\varepsilon^0)$

Nach dem Einsetzen des *WKB*-Ansatzes $\delta u = \delta^{(1)} u + \varepsilon \delta^{(2)} u + \dots$ ($\delta^{(n=0)} u = u_e$) in die *RHS*-Terme (3.18), (3.19) und anschließendem Ordnen¹² der entstehenden Terme nach den auftretenden Potenzen von ε erhält man folgende Gleichung in niedrigster Ordnung von ε .

$$L \delta^{(1)} u := -\widetilde{\text{ad}}(\tilde{h}_C \delta^{(1)} u)^* u_e + i\sigma \tilde{\nabla} \delta^{(1)} u = 0 \quad \text{Notation: } \tilde{h}_C^{(0)} \hat{=} \tilde{h}_C \quad (3.20)$$

Der in Gleichung (3.20) definierte lineare Operator L beschreibt die Dynamik linearer Seegangsmoden. Nach Multiplizieren dieser Gleichung von links mit dem „bra“-Vektor $\langle \tilde{h}_C \delta^{(1)} u |$ erhält man aufgrund der Tatsache das h_C ein hermitescher Operator ist folgenden Ausdruck für die Energie aa^* linearer Moden $\delta^{(1)} u$.

$$\tilde{E} := \langle \delta^{(1)} u, \tilde{h}_C \tilde{\nabla} \delta^{(1)} u \rangle = \frac{1}{i\sigma} \langle \delta^{(1)} u, \tilde{h}_C \widetilde{\text{ad}}(\tilde{h}_C \delta^{(1)} u)^* u_e \rangle \quad (3.21)$$

Aufgrund der Eigenschaften¹³ der koadjungierten Lie-Algebra Wirkung¹⁴ ad^* und der Gleichung (3.20) ist folgende Beziehung gegeben

$$\tilde{h}_C \widetilde{\text{ad}} \left(\frac{\partial \tilde{h}_C}{\partial T} \delta^{(1)} u \right)^* u_e = -\frac{\partial \tilde{h}_C}{\partial T} \widetilde{\text{ad}}(\tilde{h}_C \delta^{(1)} u)^* u_e = \frac{\partial \tilde{h}_C}{\partial T} i\sigma \tilde{\nabla} \delta^{(1)} u. \quad (3.22)$$

¹¹Für den in Kapitel (4.1) betrachteten Fall eines homogenen und nicht-viskosen Mediums, dessen zeitliche Entwicklung auf einer Äquipotentialfläche untersucht wird, ist die Vorticity $\nabla \times \underline{v}$ gleich der potentiellen Vorticity q und $\bar{\nabla}$ und $\varepsilon^{-1} \tilde{\nabla}$ stehen für den Rotationsoperator.

¹²Vor dem Ordnen der Terme wurden die Ausgangsgleichungen mit ε multipliziert.

¹³Für ein Lie-Algebra Element $b \in \mathfrak{g}$ ist die zu $ad_b(c)$ ($ad_b : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}, c \mapsto [b, c]$) duale Lie-Algebra Wirkung gegeben als $ad_b(\gamma)^*$ und es gilt $\langle ad_b(\gamma), c \rangle = \langle \gamma, ad_b(c) \rangle$ mit $(\gamma \in \mathfrak{g}^*)$.

¹⁴Die Lie-Algebra Klammer eines idealen Fluids ist gleich der negativen Jacobi-Lie Klammer für Vektorfelder. Für $b, c \in \mathfrak{g}$ ist die Jacobi-Lie Klammer durch $ad_b(c) = [b, c] = (c \cdot \nabla) b - (b \cdot \nabla) c = \sum_j (c_j \nabla_j b_i - b_j \nabla_j c_i)$ gegeben. Die zu \mathfrak{g} duale Lie-Algebra \mathfrak{g}^* wird durch Wahl des Dupels $\langle (\cdot), (\cdot) \rangle = \int_D (\cdot) \cdot (\cdot) d^n \underline{x}$ mit \mathfrak{g} identifiziert. Nach partieller Integration folgt die Beziehung: $\int_D h \cdot ad_b(c)^* u d^n \underline{x} = \int_D h \cdot [(c \cdot \nabla) b - (b \cdot \nabla) c] \cdot u d^n \underline{x} = -\int_D c \cdot [(b \cdot \nabla) h - (h \cdot \nabla) b] \cdot u d^n \underline{x} = -\int_D c \cdot ad_b(h)^* u d^n \underline{x}$, wenn h symmetrisch ist.

Aus der Erhaltungsgleichung $d\tilde{E}/dT = 0$ folgt zusammen mit Gleichung (3.23) ein Ausdruck für die totale Zeitableitung der Energie.

$$0 = \frac{d\tilde{E}}{dT} = \frac{d}{dT} \left(\frac{1}{i\sigma} \right) \left\langle \delta^{(1)}u, \tilde{h}_C \widetilde{\text{ad}} \left(\tilde{h}_C \delta^{(1)}u \right)^* u_e \right\rangle + \left\langle \delta^{(1)}u, \frac{d\tilde{h}_C}{dT} \tilde{\nabla} \delta^{(1)}u \right\rangle + \left(\frac{1}{i\sigma} \right) \left\langle \delta^{(1)}u, \tilde{h}_C \frac{d}{dT} \widetilde{\text{ad}} \left(\tilde{h}_C \delta^{(1)}u \right)^* u_e \right\rangle \quad (3.23)$$

Solange in Gleichung (3.23) die Klammer ad^* nur von den Gleichgewichtsgrößen u_e abhängt ist die koadjungierte Lie-Algebra Wirkung stationär. Im nächsten Abschnitt wird die Beziehung (3.23) dazu verwendet eine Bilanzgleichung für die Größe Wirkung linearer Seegangsmoden herzuleiten.

3.2.2 Gleichung der Ordnung $O(\varepsilon^1)$

Die Störungsanalyse muss noch mindestens bis zur nächst höheren Ordnung $O(\varepsilon)$ vorangebracht werden, um die zeitliche Entwicklung der Amplitude $a^{(1)}$ ($\delta^{(1)}u = a^{(1)} \exp i(\theta + \vartheta/\varepsilon)$) untersuchen zu können.

$$L\delta^{(2)}u = i\sigma \tilde{\nabla} \delta^{(2)}u - \widetilde{\text{ad}} \left(\tilde{h}_C \delta^{(2)}u \right)^* u_e \quad \text{Notation: } \tilde{h}_C^{(0)} \hat{=} \tilde{h}_C \quad (3.24)$$

$$L\delta^{(2)}u = \frac{\partial u^{(1)}}{\partial T} \frac{\tilde{\nabla} \delta^{(1)}u}{u^{(1)}} - i\sigma \overline{\nabla} \delta^{(1)}u + \overline{\text{ad}} \left(\tilde{h}_C \delta^{(1)}u \right)^* u_e + \widetilde{\text{ad}} \left(\tilde{h}_C \delta^{(1)}u \right)^* u_e + \delta \widetilde{\text{ad}} \left(\tilde{h}_C \delta^{(1)}u \right)^* u_e + \widetilde{\text{ad}} \left(\tilde{h}_C^{(1)} \delta^{(1)}u \right)^* u_e + \widetilde{\text{ad}} \left(\tilde{h}_C \delta^{(1)}u \right)^* \delta^{(1)}u \quad (3.25)$$

Die Energiekorrekturen $\mathcal{E} = a^{(1)}(a^{(1)})^*$ erster Ordnung zur Grundzustandsenergie des ungestörten Systems ergeben sich nach Multiplikation der Gleichung (3.24) von links mit dem *bra*-Vektor¹⁵ $\langle \tilde{h}_C \delta^{(1)}u |$. Das Ergebnis (3.24) kann durch Einsetzen der Gleichung (3.20) ($O(1)$) weiter vereinfacht werden. Aufgrund der Schiefsymmetrie der Jacobi-Lie Klammer ist folgende Beziehung gegeben

$$\begin{aligned} \langle \tilde{h}_C \delta^{(1)}u, L\delta^{(2)}u \rangle &= \langle \tilde{h}_C \delta^{(1)}u, -\widetilde{\text{ad}} \left(\tilde{h}_C \delta^{(2)}u \right)^* u_e + i\sigma \tilde{\nabla} \delta^{(2)}u \rangle \\ &= \langle \widetilde{\text{ad}} \left(\tilde{h}_C \delta^{(1)}u \right)^* \mu_e - i\sigma \tilde{\nabla} \delta^{(1)}\mu, \tilde{h}_C \delta^{(2)}\mu \rangle = 0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Setzt man das Resultat in Gleichung (3.25) ein und nutzt aus, dass

$$\begin{aligned} \overline{\text{ad}} \left(\tilde{h}_C \delta^{(1)}u \right)^* u_e &= \overline{\nabla}_{ad} \left[\hat{\text{ad}} \left(\tilde{h}_C \delta^{(1)}u \right)^* u_e \right] - \overline{\nabla}_{ad} \hat{\text{ad}} \left(\tilde{h}_C \delta^{(1)}u \right)^* u_e \quad \text{und} \\ \widetilde{\text{ad}} \left(\tilde{h}_C \delta^{(1)}u \right)^* u_e &= \overline{\nabla}_h \cdot \left[\widetilde{\text{ad}} \left(\hat{h}_C \delta^{(1)}u \right)^* u_e \right] - \overline{\nabla}_h \cdot \widetilde{\text{ad}} \left(\hat{h}_C \delta^{(1)}u \right)^* u_e \\ &\quad - \widetilde{\text{ad}} \left(\overline{\nabla}_h \cdot \hat{h}_C \delta^{(1)}u \right)^* u_e \end{aligned} \quad (3.27)$$

¹⁵Nach Dirac wird jedem *ket*-Vektor $|\varphi\rangle$ ein zu ihm dualer *bra*-Vektor $\langle\varphi|$ zugeordnet. Das Produkt beider Vektoren ist die Skalarproduktklammer $\langle\varphi|\varphi\rangle$ (*bra-c-ket*).

(Definitionen: $\overline{\text{ad}}(a)^* u_e =: \hat{\text{ad}}(\overline{\nabla}_{ad} a)^* u_e$; $\overline{h}_C \delta^{(1)} u =: \hat{h}_C \cdot \overline{\nabla}_h \delta^{(1)} u$) so erhält man eine von $\delta^{(2)} u$ unabhängige Bilanzgleichung für die Energie¹⁶ \mathcal{E} linearer Seegangsmoden.

$$\begin{aligned}
0 &= \left\langle \delta^{(1)} u, \tilde{h}_C \frac{\partial u^{(1)}}{\partial T} \frac{\tilde{\nabla} \delta^{(1)} u}{u^{(1)}} \right\rangle - i\sigma \left\langle \delta^{(1)} u, \tilde{h}_C \overline{\nabla} \delta^{(1)} u \right\rangle \\
&\quad - i \left\langle \delta^{(1)} u, \tilde{h}_C \overline{\nabla}_{ad} \cdot \left[\nabla_k \tilde{\text{ad}} \left(\tilde{h}_C \delta^{(1)} u \right)^* u_e \right] + \tilde{h}_C \overline{\nabla}_h \cdot \left[\tilde{\text{ad}} \left(\nabla_k \tilde{h}_C \delta^{(1)} u \right)^* u_e \right] \right\rangle \\
&\quad + i \left\langle \delta^{(1)} u, \tilde{h}_C \overline{\nabla}_h \cdot \tilde{\text{ad}} \left(\nabla_k \tilde{h}_C \delta^{(1)} u \right)^* u_e + \tilde{h}_C \tilde{\text{ad}} \left(\overline{\nabla}_h \cdot \nabla_k \tilde{h}_C \delta^{(1)} u \right)^* u_e \right\rangle \\
&\quad + i \left\langle \delta^{(1)} u, \tilde{h}_C \overline{\nabla}_{ad} \nabla_k \tilde{\text{ad}} \left(\tilde{h}_C \delta^{(1)} u \right)^* u_e \right\rangle + \left\langle \delta^{(1)} u, \text{Im}^{(1)} \delta^{(1)} u \right\rangle
\end{aligned} \tag{3.28}$$

In dieser Gleichung wurde ausgenutzt, dass aus der Definition $\varepsilon \tilde{\nabla} \delta^{(n)} u = i \underline{k} \delta^{(n)} u$ folgt das $\overline{\boxplus} \delta^{(n)} u = \hat{\boxplus} \cdot \overline{\nabla}_{\boxplus} \delta^{(n)} u = -i \nabla_k \hat{\boxplus} \cdot \overline{\nabla}_{\boxplus} \delta^{(n)} u$, wobei \boxplus entweder für das Funktional h_C oder für die Klammer ad^* steht. In der hier verwendeten Notation kennzeichnet $\overline{\nabla}_{\boxplus}$ (mit $\boxplus = h$ oder $\boxplus = ad$) die in h_C und ad^* auftretenden Differentialoperatoren, welche auf die Lösung (=Seegang) der Gleichung n -ter Ordnung $\delta^{(n)} u$ wirken. Der in Gleichung(3.28) definierte Operator $\text{Im}^{(1)}$ enthält ausschließlich imaginäre Terme.

$$\begin{aligned}
\text{Im}^{(1)} \delta^{(1)} u &= \tilde{h}_C \delta \tilde{\text{ad}} \left(\tilde{h}_C \delta^{(1)} u \right)^* u_e + \tilde{h}_C \tilde{\text{ad}} \left(\tilde{h}_C^{(1)} \delta^{(1)} u \right)^* u_e + \\
&\quad + \tilde{h}_C \tilde{\text{ad}} \left(\tilde{h}_C \delta^{(1)} u \right)^* \delta^{(1)} u
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Gleichung (3.28) kann durch Einsetzen der Gleichung (3.21) weiter vereinfacht werden. Dazu wird Gleichung (3.21) nach der Wellenzahl k abgeleitet¹⁷ und die Definition der Gruppengeschwindigkeit $\underline{c}_g = \nabla_k \sigma$ eingeführt.

$$\begin{aligned}
\tilde{E} \underline{c}_g + (\nabla_k \tilde{E}) \sigma &= -i \left\langle \delta^{(1)} u, \tilde{h}_C \nabla_k \tilde{\text{ad}} \left(\tilde{h}_C \delta^{(1)} u \right)^* u_e + \tilde{h}_C \tilde{\text{ad}} \left(\nabla_k \tilde{h}_C \delta^{(1)} u \right)^* u_e \right\rangle \\
&= -i \left\langle \delta^{(1)} u, \tilde{h}_C \nabla_k \tilde{\text{ad}} \left(\tilde{h}_C \delta^{(1)} u \right)^* u_e + \nabla_k \tilde{h}_C \left(i\sigma \tilde{\nabla} \delta^{(1)} u \right) \right\rangle
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Nach dem Einsetzen der Gleichung (3.30) in die zweite Zeile der Gleichung (3.28) und dem Ausnutzen der Beziehung (3.31) (Terme die zweifache Ableitungen $\overline{\nabla} \cdot \nabla_k(\dots)$ enthalten bleiben dabei unberücksichtigt.)

$$\overline{\nabla} \cdot \nabla_k (\tilde{E} \sigma) \equiv \overline{\nabla} \tilde{E} \cdot \nabla_k \sigma + \nabla_k \tilde{E} \cdot \overline{\nabla} \sigma \tag{3.31}$$

erhält man folgenden Ausdruck (mit $\nabla_k \sigma = \underline{c}_g$ und $\nabla_x \sigma = -\dot{k}$) für die Energiebilanz des Seegangs.

$$\begin{aligned}
0 &= \left\langle \delta^{(1)} u, \tilde{h}_C \frac{\partial u^{(1)}}{\partial T} \frac{\tilde{\nabla} \delta^{(1)} u}{u^{(1)}} \right\rangle - i\sigma \left\langle \delta^{(1)} u, \tilde{h}_C \overline{\nabla} \delta^{(1)} u \right\rangle + \overline{\nabla} \tilde{E} \cdot \underline{c}_g + \nabla_k \tilde{E} \cdot \dot{k} \\
&\quad + i \left\langle \delta^{(1)} u, \left[N^{(1)} + \text{Im}^{(1)} \right] \delta^{(1)} u \right\rangle + i \left\langle \delta^{(1)} u, \left(\overline{\nabla} \tilde{h}_C \right) \nabla_k \left[i\sigma \tilde{\nabla} \delta^{(1)} u \right] \right\rangle.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

In der zweiten Zeile von Gleichung (3.32) wurde die Definition des linearen Operators L eingesetzt und die abkürzende Schreibweise

$$\begin{aligned}
N^{(1)} \delta^{(1)} u &= \left(\overline{\nabla} \tilde{h}_C \right) \nabla_k \tilde{\text{ad}} \left(\tilde{h}_C \delta^{(1)} u \right)^* u_e + \tilde{h}_C \overline{\nabla} \cdot \tilde{\text{ad}} \left(\nabla_k \tilde{h}_C \delta^{(1)} u \right)^* u_e \\
&\quad + \tilde{h}_C \overline{\nabla} \cdot \nabla_k \tilde{\text{ad}} \left(\tilde{h}_C \delta^{(1)} u \right)^* u_e + \tilde{h}_C \tilde{\text{ad}} \left(\overline{\nabla}_h \cdot \nabla_k \tilde{h}_C \delta^{(1)} u \right)^* u_e
\end{aligned}$$

¹⁶Wie aus dem Abschnitt 1.2.1 bekannt ist, kann anstelle der Seegangenergie $\frac{1}{2} \rho g \mathcal{E}$ das Amplitudenquadrat \mathcal{E} betrachtet werden, wenn die Dichte des Wassers ρ konstant ist.

¹⁷Die koadjungierte Wirkung $\tilde{\text{ad}}^*$ ist nach Definition von k abhängig.

eingeführt. Die beiden von $(i\sigma)$ abhängigen Terme lassen sich zusammenfassen

$$\begin{aligned} -i\sigma\tilde{h}_C\bar{\nabla}\delta^{(1)}u + i\left(\bar{\nabla}\tilde{h}_C\right)i\sigma\nabla_k\tilde{\nabla}\delta^{(1)}u &= -i\sigma\tilde{h}_C\left(\bar{\nabla}\delta^{(1)}u\right) - i\sigma\left(\bar{\nabla}\tilde{h}_C\right)\delta^{(1)}u \\ &= -\bar{\nabla}\left(i\sigma\tilde{h}_C\delta^{(1)}u\right) + \left(\bar{\nabla}i\sigma\right)\tilde{h}_C\delta^{(1)}u \end{aligned}$$

und nach Multiplikation von links mit $\langle\delta^{(1)}u|$ sowie nochmaligem Ausnutzen der Beziehung (3.30) in die folgende Gestalt bringen (nur der zweite Term).

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\nabla}\sigma}{i\sigma}\left\langle\delta^{(1)}u, i\sigma\tilde{h}_C\delta^{(1)}u\right\rangle &= -\frac{\bar{\nabla}\sigma}{i\sigma}\left\langle\delta^{(1)}u, \nabla_k\tilde{h}_C i\sigma\tilde{\nabla}\delta^{(1)}u\right\rangle \\ &= \frac{\bar{\nabla}\sigma}{\sigma}\tilde{E}\cdot\underline{c}_g + \frac{\bar{\nabla}\sigma}{i\sigma}\left\langle\delta^{(1)}u, \tilde{h}_C\nabla_k\tilde{\text{ad}}\left(\tilde{h}_C\delta^{(1)}u\right)^*u_e\right\rangle \end{aligned} \quad (3.33)$$

Bei der Herleitung von Gleichung (3.33) wurde vorausgesetzt, dass σ von der Wellenzahl k nicht abhängt und vor die Ableitung in der zweiten Zeile von (3.32) gezogen werden kann. Dieser Fehler wird nun dadurch wieder korrigiert, dass zu Gleichung (3.33) noch die beiden Terme auf der rechten Seite von (3.34) addiert werden¹⁸.

$$\begin{aligned} -\frac{\nabla_k\sigma}{i\sigma}\left\langle\delta^{(1)}u, \bar{\nabla}\tilde{h}_C i\sigma\tilde{\nabla}\delta^{(1)}u\right\rangle &= \frac{\nabla_k\sigma}{\sigma}\tilde{E}\dot{\underline{k}} + \\ &+ \frac{\nabla_k\sigma}{i\sigma}\left\langle\delta^{(1)}u, \tilde{h}_C\bar{\nabla}\tilde{\text{ad}}\left(\tilde{h}_C\delta^{(1)}u\right)^*u_e\right\rangle \end{aligned} \quad (3.34)$$

Das Ergebnis der Gleichung nullter Ordnung in ε (3.23) kann auch dazu verwendet werden, den ersten Term auf der rechten Seite von Gleichung (3.32) umzuformen.

$$\begin{aligned} \left\langle\delta^{(1)}u, \tilde{h}_C\frac{\partial u^{(1)}}{\partial T}\frac{\tilde{\nabla}\delta^{(1)}u}{u^{(1)}}\right\rangle &= \frac{\partial\tilde{E}}{\partial T} - \left\langle\delta^{(1)}u, \frac{\partial\tilde{h}_C}{\partial T}\tilde{\nabla}\delta^{(1)}u\right\rangle = \frac{\partial\tilde{E}}{\partial T} - \frac{\partial\sigma}{\partial T}\frac{\tilde{E}}{\sigma} + \\ &+ \frac{i}{\sigma}\left\langle\delta^{(1)}u, \tilde{h}_C\frac{\partial}{\partial T}\tilde{\text{ad}}\left(\tilde{h}_C\delta^{(1)}u\right)^*u_e\right\rangle \end{aligned} \quad (3.35)$$

Nach Einsetzen aller Zwischenergebnisse (3.33), (3.34) und (3.35) in Gleichung (3.32) erhält man folgende Beziehung.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial\tilde{E}}{\partial T} + \bar{\nabla}\tilde{E}\cdot\underline{c}_g + \nabla_k\tilde{E}\cdot\dot{\underline{k}} - \left[\frac{\partial\sigma}{\partial T} + (\bar{\nabla}\sigma)\cdot\underline{c}_g + \nabla_k\sigma\cdot\dot{\underline{k}}\right]\frac{\tilde{E}}{\sigma} \\ &+ \left\langle\delta^{(1)}u, i\bar{\nabla}\left(i\sigma\nabla_k\tilde{h}_C\tilde{\nabla}\delta^{(1)}u\right) + \text{Im}^{(1)}\delta^{(1)}u\right\rangle \\ &+ \frac{i}{\sigma}\left\langle\delta^{(1)}u, \tilde{h}_C\text{abl}\delta^{(1)}u\right\rangle + i\left\langle\delta^{(1)}u, N^{(1)}\delta^{(1)}u\right\rangle \end{aligned} \quad (3.36)$$

Die in Gleichung (3.36) definierte Abkürzung *abl* enthält alle Ableitungen der koadjungierten Lie-Algebra Wirkung aus den Gleichungen (3.33), (3.34) und (3.35).

$$\begin{aligned} \text{abl}\delta^{(1)}u &= \frac{\partial}{\partial T}\tilde{\text{ad}}\left(\tilde{h}_C\delta^{(1)}u\right)^*u_e + (\bar{\nabla}\sigma)\nabla_k\tilde{\text{ad}}\left(\tilde{h}_C\delta^{(1)}u\right)^*u_e \\ &+ (\nabla_k\sigma)\bar{\nabla}\tilde{\text{ad}}\left(\tilde{h}_C\delta^{(1)}u\right)^*u_e \end{aligned} \quad (3.37)$$

Nach Multiplikation mit $(ik)^{-3}$ ist die Energiebilanz des Seegangs durch den Realteil von Gleichung (3.36) gegeben. Als Nächstes wird deshalb Gleichung (3.36) in Real- und Imaginärteil aufgespalten.

¹⁸In die rechte Seite von Gleichung (3.34) wurde der Gradient von σ eingesetzt.
 $\tilde{E}\dot{\underline{k}} = -\tilde{E}\bar{\nabla}\sigma = i\left\langle\delta^{(1)}u, \tilde{h}_C\bar{\nabla}_x\tilde{\text{ad}}\left(\tilde{h}_C\delta^{(1)}u\right)^*u_e + \bar{\nabla}\tilde{h}_C(i\sigma\tilde{\nabla}\delta^{(1)}u)\right\rangle$

Dabei muss beachtet werden, dass der Operator $h_C \delta^{(1)} u$ zweifache Ableitungen des dynamischen Vektors $\delta^{(1)} u$ enthält und der Wertebereich von \bar{h}_C und \tilde{h}_C deshalb eine Teilmenge der reellen Zahlen ist. Wie aus der Nebenrechnung (3.38) und Gleichung (3.39) hervorgeht sind die Terme der ersten Zeile reell. Die in der zweiten Zeile von (3.36) zusammengefassten Terme können gegeneinander gekürzt werden (Anhang A2: Kapitel 10.3). Auch die Terme der dritten Zeile brauchen nicht betrachtet zu werden, da sie ausschließlich imaginäre Größen enthalten. Die Wirkungsbilanzgleichung (3.39) entspricht dem Realteil der ersten Zeile von (3.36), nach Multiplikation mit $(ik)^{-3}$. Wenn der *WKB*-Ansatz (3.12) (mit $\tilde{h}_C \equiv (ik)^2 \hat{h}_C$ und $\tilde{\nabla} \delta^{(1)} u = ik \delta^{(1)} u$)

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= \left\langle \delta^{(1)} u, \tilde{h}_C \tilde{\nabla} \delta^{(1)} u \right\rangle = \left\langle u^{(1)}, \hat{h}_C (ik)^3 u^{(1)} \right\rangle \\ &= a^{(1)} (a^{(1)})^* \left\langle \exp(i\theta), \hat{h}_C \exp(i\theta) \right\rangle (ik)^3 =: \mathcal{E} \mathcal{F} (ik)^3, \end{aligned} \quad (3.38)$$

in Gleichung (3.36) eingesetzt wird, dann erhält man nach Definieren der Funktionale $\mathcal{E} = a^{(1)} (a^{(1)})^*$ und \mathcal{F} die folgende Bilanzgleichung für die Größe Wellenwirkung $I = \mathcal{E} \mathcal{F} / \sigma$.

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial \tilde{E}}{\partial T} + \overline{\nabla} \tilde{E} \cdot \underline{c}_g + \nabla_k \tilde{E} \cdot \underline{\dot{k}} \right) - \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T} + (\overline{\nabla} \sigma) \cdot \underline{c}_g + (\nabla_k \sigma) \cdot \underline{\dot{k}} \right) \frac{\tilde{E}}{\sigma^2} \right] = \\ = \left(\frac{\partial \mathcal{E} \mathcal{F} / \sigma}{\partial T} + \overline{\nabla} \frac{\mathcal{E} \mathcal{F}}{\sigma} \cdot \underline{c}_g + \nabla_k \frac{\mathcal{E} \mathcal{F}}{\sigma} \cdot \underline{\dot{k}} \right) (ik)^3 = \frac{d I}{d T} (ik)^3 = 0 \end{aligned} \quad (3.39)$$

Die Gleichung (3.39) ist eine nicht-kanonische Bilanzgleichung für die Größe Wellenwirkung. Sie entspricht der kanonischen Wirkungsbilanzgleichung¹⁹ für \mathcal{F} gleich 1. In Kapitel 4.1 wird der Spezialfall einer Scherströmung $\underline{v}_e = v_e(\tilde{y}) \underline{\tilde{x}}$ auf der $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} = \text{konst.})$ -Ebene des \mathbb{R}^3 behandelt. Für diesen einfachen Fall ist \mathcal{F} gleich $\mathcal{F} = (1 + v_e k^2 / \partial_{\tilde{y}}^2 v_e)$. Die formale Stabilität der planparallelen Strömung \underline{v}_e ist unter der Voraussetzung gewährleistet, dass $v_e / \partial_{\tilde{y}}^2 v_e$ für alle Zeiten positiv oder negativ ist und durch $a, A \in \mathbb{R}$ beschränkt wird: $0 < a \leq |v_e / \partial_{\tilde{y}}^2 v_e| \leq A < \infty$. Für solche Scherströmungen ist die Größe Wellenwirkung (3.39) bzw. (4.25) eine Invariante der Bewegung.

Die Größenordnung des Casimirbeitrags zu dem skalaren Faktor \mathcal{F} wird nun anhand eines einfachen Beispiels abgeschätzt. Betrachtet wird eine ebene Poiseuille-Strömung zwischen zwei unendlich ausgedehnten, starren Platten ([Pij90] p. 266). Nach einer gewissen Einlauflänge ergibt sich ein stationäres, zweidimensionales Strömungsprofil (3.40), das lediglich vom Plattenabstand $2b$ und dem Druckgradienten $\partial p / \partial \tilde{x}$ in Strömungsrichtung abhängt. Es wird ein orthonormales Koordinatensystem verwendet, dessen Ursprung sich auf einer der beiden Platten befindet. Das Wasser fließt in $\underline{\tilde{x}}$ -Richtung und das parabolische Strömungsprofil hängt nur von der \tilde{y} -Koordinate ab. Die Position der beiden parallelen Platten ist durch $\tilde{y} = 0$ und $\tilde{y} = 2b$ gegeben. In der Mitte zwischen den Platten ist die Strömung gleich $\underline{v}_{e0} = \underline{v}_e(\tilde{y} = b)$. Für ein Fluid mit der Dichte ρ und der Viskosität ν erhält man das folgende Ergebnis.

$$\underline{v}_e = \left(b - \frac{\tilde{y}}{2} \right) \tilde{y} \frac{2 \underline{v}_{e0}}{b^2} \quad \text{mit} \quad \underline{v}_{e0} = -\frac{b}{2} \frac{\tilde{y}}{\rho \nu} \frac{\partial p}{\partial \tilde{x}} \quad (3.40)$$

Der skalare Faktor $\mathcal{F} = 1 + \bar{\mathcal{F}}$ ist unter diesen Voraussetzungen gleich (3.41). Nach Reskalierung der \tilde{y} -Koordinate $\tilde{y} = \tilde{\alpha} b$ ($\tilde{\alpha} \in [0, 2]$) erhält man die folgende Beziehung

$$\bar{\mathcal{F}} = \frac{v_e k^2}{\partial_{\tilde{y}}^2 v_e} = \left(\frac{\tilde{y}}{2} - b \right) \tilde{y} k^2 = \left(\frac{\tilde{\alpha}}{2} - 1 \right) \tilde{\alpha} b^2 k^2. \quad (3.41)$$

In dem hier untersuchten Beispiel breiten sich die Wellen in Richtung der Strömung aus. Der ebene Wellen-Ansatz hängt aber nicht von der \tilde{y} -Koordinate quer zu den parallelen Platten ab.

¹⁹Die mittlere Strömung $\langle v \rangle$ wird in der Dispersionsrelation des Wellenzuges berücksichtigt $c_g = \nabla_k \sigma + \langle v \rangle$.

Für $\bar{\mathcal{F}} = 1$ sind die Wirkungsbeiträge des Hamilton- und Casimirfunktionalen von der gleichen Größenordnung. In diesem Fall folgt aus Gleichung (3.41) die Beziehung (3.42) zwischen der Wellenlänge $\lambda = 2\pi/k$ und dem Plattenabstand als charakteristischem Maß der Stromscherung.

$$\bar{\mathcal{F}} = 1 = \left(\frac{\tilde{\alpha}}{2} - 1 \right) \tilde{\alpha} b^2 k^2 \implies b = \frac{\lambda}{\sqrt{4\tilde{\alpha} - 2\tilde{\alpha}^2} \pi} \quad (3.42)$$

In der Mitte zwischen den Platten ist $b = \lambda/\sqrt{2} \pi = \sqrt{2}/k$ maximal. Für Seegangsmoden, die im Wellenzahlbereich des k -Modells ($0.01 \text{ m}^{-1} \leq k \leq 1.72 \text{ m}^{-1}$) enthalten sind, ergeben sich Abstandswerte, die in dem Bereich $0.8 \text{ m} \leq b \leq 141.4 \text{ m}$ liegen. Damit ist b kleiner als die Wellenlänge des Seegangs $3.6 \text{ m} \leq \lambda \leq 628.3 \text{ m}$. Auf dem offenen Meer werden solche Strömungsprofile nicht beobachtet. Dort ist die Krümmung $\partial_y^2 v_e$ kleiner, was größeren b -Werten entspricht. Der Faktor $\bar{\mathcal{F}}$ ist dadurch größer als Eins. Unter diesen Umständen ist der Wirkungsbeitrag des Casimirfunktionalen, der eine stabile Eulersche Strömung gewährleistet, größer als der Beitrag des Hamiltonfunktionalen. Letzterer beschreibt die zeitliche Entwicklung des Seegangs, für eine Eulersche Strömung vom Betrage Null. Damit widerspricht das Ergebnis der Annahme, dass herkömmliche Wellenmodelle ohne Casimirbeitrag die Seegangsverhältnisse objektiv beschreiben können. Die Frage ist also, welcher bisher unberücksichtigte Mechanismus den Casimirbeitrag reduziert und zu einer Angleichung der Ergebnisse kanonischer ($\bar{\mathcal{F}} = 0$) und nicht kanonischer Modelle ($\bar{\mathcal{F}} \neq 0$) führt. Dies kann nur die Dissipation von Seegangsenergie bewirken. In Gleichung (3.39) bleibt der Nettoeffekt der Source-Funktionen unberücksichtigt. Darauf wird in der Einleitung von Kapitel 8 näher eingegangen. Zusätzlich zum Casimirbeitrag wirkt die Dissipation von Seegangsenergie stabilisierend auf das Gesamtsystem. Hier muss daran erinnert werden, dass die Stabilität der Eulerschen Strömung bisher stets vorausgesetzt worden ist. Der homogene Strömungszustand $\partial_y^2 v_e \approx 0$ ist aber hochgradig instabil. Um die Amplitude der anwachsenden Störung (Seegang) zu begrenzen, muss der Casimirbeitrag (3.42) zur Wellenwirkung große Werte annehmen. Dahingegen wird bei einem negativen Nettoeffekt der Source-Funktionen, d.h. überwiegender Dissipation, der Casimirbeitrag reduziert. Dieser Beitrag ist unter der Voraussetzung klein, dass die Dissipation von Wellenenergie der Hauptmechanismus für die Stabilisierung des Gesamtsystems Seegang & Strömung ist. Formuliert man das Ergebnis in der folgenden Weise werden die Implikationen dieser Aussage noch etwas deutlicher. Ohne Dissipationsprozesse zu berücksichtigen ist der Faktor $\bar{\mathcal{F}}$ nur für sehr große Wellenlängen eine kleine Zahl. Solche Werte sind für Seegangsmoden untypisch. Üblicherweise werden Seegangs- und Strömungsverhältnisse beobachtet, die zu großen Beträgen von $\bar{\mathcal{F}}$ führen. Dann ist $\bar{\mathcal{F}}$ keine kleine Korrektur des kanonischen Wertes $\bar{\mathcal{F}} = 0$ mehr ($\mathcal{F} = 1 + \bar{\mathcal{F}}$). Das gekoppelte, numerische Modell für Seegang und Strömung enthält deshalb nur eine kanonische Formulierung der Wirkungsbilanzgleichung ($\mathcal{F} = 1$). Wird in Gleichung (3.39) die Dispersionsrelation $\sigma = \sigma(\underline{k}, \Lambda(\underline{X}, T))$ der *WKB*-Moden eingesetzt, so erhält man nach einigen Umformungen aus (3.39) eine Bilanzgleichung für die Energie der Seegangsmoden²⁰ $d\mathcal{E}\mathcal{F}/dT = \underline{S} : \nabla_{\underline{X}} \underline{v}$ (in Komponentenschreibweise $d\mathcal{E}\mathcal{F}/dT = S_{ij} \cdot \nabla_{X_i} v_j$). Eine vergleichbare Rechnung für den Spezialfall linearer Wellen $\sigma^2 = gk \tanh(kh)$ und einer kanonischen Beschreibung des Seegangs ($\mathcal{F} = 1$) ist in Kapitel (5.2) dargestellt (Gleichung (5.20)). Die totale Zeitableitung der Energie am Ort \underline{X} entspricht der Divergenz des Radiationstress-Tensors \underline{S} . In der Impulsbilanzgleichung der mittleren Strömung $\langle \underline{v} \rangle = \underline{v}_e + \langle \delta^{(2)} \underline{v} \rangle$ besitzt die Divergenz von \underline{S} die Dimension einer beschleunigenden Kraft $d\langle \underline{v} \rangle / dT = -\langle \underline{S} : \nabla_{\underline{X}} \underline{v} \rangle$. Im Anhang (Kapitel (10.4)) und dem folgenden Abschnitt wird ein allgemein, für alle Hamiltonischen Systeme gültiger Ausdruck des Radiationstress-Tensor aus der Entwicklungsgleichung nächst höherer Ordnung ($O(\varepsilon^2)$) hergeleitet.

²⁰Das Skalarprodukt zweier dyadischer Produkte (\underline{ab}) und (\underline{cd}) ist durch $(\underline{ab}) : (\underline{cd}) = (\underline{a} \cdot \underline{c})(\underline{b} \cdot \underline{d})$ gegeben.

Kapitel 4

Der Radiationstress-Tensor

Die im Kapitel 3.2.2 hergeleitete Wellenwirkungsbilanz resultiert aus einer Linearisierung der nichtkanonischen Hamiltonischen Gleichung. In der letztendlich gefundenen Erhaltungsgleichung (3.39) bestimmen Propagation und Refraktion die Dynamik der linearen Seegangs-Lösung $\delta^{(1)}u$. Eine Verlagerung der Wellenenergie im Spektrum führt aufgrund der Invarianz der Größe Wellenwirkung zu einem seegangsinduzierte Beitrag in den Bilanzgleichungen der mittleren Strömung $u_e + \langle \delta u \rangle$ (Kapitel 5.2). Der Divergenzterm des Radiationstress lässt sich in den vertikal integrierten und phasengemittelten $O(\varepsilon^2)$ -Bilanzgleichungen (3.25), (10.26) als zur Seegangsenergie $\mathcal{E} = a^{(1)}(a^{(1)})^*$ proportionaler Anteil (4.1) identifizieren. Nach dem Zusammenfassen aller Gleichungen der Störungsentwicklung und Separation der zu \mathcal{E} proportionalen Anteile erhält man ein System dynamischer Gleichungen (4.1) für den mittleren seegangsbehafteten Strömungs-Zustand $\langle u \rangle$ (Anhang A3: Kapitel 10.4). Bei der Herleitung von (4.1) wurde die Bilanzgleichung des bisher nicht betrachteten Gleichgewichtszustandes u_e (3.3| $u=u_e$) zu der Bilanzgleichung der Stokesdrift addiert. Unter der Voraussetzung, dass die Eulersche Strömung auf den räumlichen und zeitlichen Skalen des Seegangs stabil und stationär ist, auf den Skalen der mittleren Strömung aber variabel $\partial u_e / \partial T = -\overline{\text{ad}}(\delta H / \delta u_e)^* u_e \neq 0$, wird die zeitliche Entwicklung der mittleren Strömung durch (4.1), (4.2) beschrieben.

Der zusätzliche Antrieb (Impetus), den die mittleren Zustandsvariablen aufgrund des Vorhandenseins von Seegang erfahren, ist gleich der Divergenz des Radiationstress-Tensors S_{ij} . Die horizontal über das einfach zusammenhängende Gebiet \mathcal{D} und vertikal über die Dicke der Schicht $s(\zeta_1) \leq \tilde{z} \leq s(\zeta_2)$ integrierten Bilanzgleichung sind gleich

$$\frac{1}{V} \int_{\mathcal{D}} \int_{s(\zeta_1)}^{s(\zeta_2)} \left\{ \frac{\partial [(u_e)_i + \langle \delta^{(2)} u_i \rangle]}{\partial T} + \overline{\text{ad}} \left(\frac{\delta H}{\delta u_e} \right)^* u_e \right\} dz d^2 \underline{x} = -\nabla_{X_j} [\hat{S}_{ij}(\underline{X}, T)] . \quad (4.1)$$

$$\nabla_{X_j} \hat{S}_{ij} = \frac{1}{2\pi V} \int_0^{2\pi} \int_{\mathcal{D}} \int_{s(\zeta_1)}^{s(\zeta_2)} \left\{ \overline{\text{ad}}(\tilde{h}_C \delta^{(1)} u_j)^* \delta^{(1)} u_i + \overline{\text{ad}}(\tilde{h}_C \delta^{(2)} u_j)^* (u_e)_i \right\} dz d^2 \underline{x} d\theta \quad (4.2)$$

Der Tensor¹ S_{ij} entspricht dem Integral der $O(\varepsilon^2)$ -Terme der Störungsreihe (3.15) über das Volumen einer Elementarzelle. Die Funktion $s(\zeta)$ legt zu jedem Zeitpunkt die Position der in \tilde{z} -Richtung mit der Wellenbewegung auf und ab bewegten Koordinatenfläche ($\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} = s(\zeta)$) fest. ζ ist eine Funktion der Tiefe und variiert linear zwischen $\zeta = -1$ am Boden und $\zeta = 0$ an der Oberfläche. Es werden

¹Um die Elemente des Radiationstress-Tensors S_{ij} zu kennzeichnen wird in Gleichung (4.1) und (4.2) die Komponentenschreibweise verwendet.

nur reellwertige Terme der Störungsentwicklung berücksichtigt, die sich aus Lösungen $\delta^{(1)}u$ der linearisierten Bewegungsgleichung (Kap. 3.2.1, 3.2.2) und $O(\varepsilon^2)$ *WKB*-Moden $\delta^{(2)}u$ zusammensetzen. Wenn u gleich der mittleren Strömung \underline{v} ist, dann entspricht $\underline{v}_{sd} = \langle \delta^{(2)}\underline{v} \rangle$ der Stokesdrift. Die Gleichung (4.1) $_{|u=v}$ ist eine gewöhnliche Differentialgleichung für die mittlere Strömung $\langle \underline{v} \rangle = \underline{v} + \underline{v}_{sd}$ da die Rechte Seite von (4.2) neben der Divergenz des Radiationstress-Tensors S_{ij} (1.Term (4.2)) auch noch die advective Ableitung $(\underline{v}_e \cdot \nabla) \underline{v}_{sd}$ der Stokesdrift, oder die Beschreibung der Advektion von Eulerscher Strömung durch Stokesdrift $(\underline{v}_{sd} \cdot \nabla) \underline{v}_e$, enthält (2.Term (4.2)). Welcher von den beiden Termen gleich Null gesetzt werden kann, hängt von der konkreten Form der Lie-Poisson Klammer ab. Aufgrund der Forderung nach Stabilität des Gleichgewichtszustandes u_e ist $\overline{\text{ad}}(\delta H_C / \delta u_e)^* \delta^{(2)}u = 0$. Der Beitrag $(\underline{v}_{sd} \cdot \nabla) \underline{v}_{sd}$ ist von $O(\varepsilon^4)$ -ter Ordnung und wird in dieser Arbeit nicht betrachtet.

Die hier präsentierte Formulierung von S_{ij} stellt eine Verallgemeinerung des von Longuet-Higgins eingeführten Konzeptes auf Nicht-Kanonische Hamiltonische Systeme dar. Seegang wird als Störung aller dynamischen Größen u aufgefasst und induziert dementsprechend auch einen Beitrag zu den Bilanzgleichungen aller Variablen. Jede seegangsabhängige Differentialgleichung (4.1) enthält einen Divergenzterm von S_{ij} . Im Rahmen dieser Arbeit wird der Einfluss von Seegang auf die Massen- und Impulsbilanz der mittleren Strömung untersucht. Darum setzt sich S_{ij} aus dem Reynoldsstress $(\delta^{(1)}v_i \delta^{(1)}v_j)$ und dem Effekt der Druckfluktuationen $(\delta_{ij} \delta^{(1)}p)$ zusammen. Der Tensor S_{ij} entspricht dem in Abschnitt (10.5) hergeleiteten Ergebnis (4.73) für ein inkompressibles Fluid auf einer Äquipotentialfläche des Gravitationsfeldes. In flachen Gewässern, wo die Wellenlänge λ viel größer als die Wassertiefe h_e ist $h_e/\lambda \ll 1$, kann $\delta^{(1)}p$ durch den hydrostatischen Druck $\rho^* g \delta^{(1)}h$ ersetzt werden. Dazu muss in Gleichung (4.1) zu dem System Hamiltonischer Flachwasser-Gleichungen übergegangen werden (Kap. 4.2). In den nächsten Abschnitten dieses Kapitels wird der Radiationstress-Tensor S_{ij} für diese hydrodynamischen Beispiele berechnet.

Eine Vielzahl von weiteren Spezialfällen wurde aus dem kompletten Hamiltonschen System durch vereinfachende Näherungen basierend auf Skalen-Argumenten hergeleitet. Die hier vorgestellte Methode liefert einen systematischen Weg den Radiationstress-Tensor aus den Hamiltonschen Gleichungen abzuleiten und formalisiert die Prozedur. Mit (3.39) und (4.1) ist ein einheitliches System von Bilanzgleichungen für die Dynamik von Seegang und Strömung gegeben. Bedingt durch die Definition des Energiefunktionals H_C ist der Gleichgewichtszustand u_e in beiden Gleichungen stabil und stationär. Der Prozess dynamischer Stabilisierung von u_e beeinflusst gleichermaßen die Orbitalbewegung des Seegangs (Kapitel 3.2.2) und die zeitliche Entwicklung der mittleren Strömung (Gleichung (4.1)). Das ist neu. Der zusätzliche Beitrag des Casimirfunktionals C in den Bewegungsgleichungen (4.1) beschreibt den Einfluss des Gleichgewichtszustandes u_e (Eulersche Strömung \underline{v}_e) auf die zeitliche Entwicklung des mittleren Seegangs u_{sd} (Stokesdrift \underline{v}_{sd}). Für das in Kapitel 4.23 und 4.2 behandelte Beispiel einer Scherströmung $\underline{v}_e = v_e \underline{\tilde{x}}$ auf der $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} = \text{konst.})$ -Ebene des \mathbb{R}^3 ist der Beitrag von C in den Bewegungsgleichung (4.1) gleich der Divergenz von S_{ij} multipliziert mit $(v_e k^2 / \partial_{\tilde{y}}^2 v_e)$. Wenn der Faktor $v_e / \partial_{\tilde{y}}^2 v_e$ für alle Zeiten positiv und beschränkt ist, dann ist v_e formal stabil und die zeitliche Entwicklung der mittleren Strömung durch Gleichung (4.1) gegeben. Die Krümmung des Geschwindigkeitsprofils $v_e(\tilde{y})$, also die zweifache Ableitung von $v_e(\tilde{y})$ in \tilde{y} -Richtung $\partial_{\tilde{y}}^2 v_e$, bestimmt die Wirksamkeit des Casimir-Beitrags. Wenn der Faktor $v_e / \partial_{\tilde{y}}^2 v_e$ für alle Zeiten positiv ist, also $\partial_{\tilde{y}}^2 v_e > 0$, dann ist der zusätzliche Beitrag von C um so größer je kleiner $\partial_{\tilde{y}}^2 v_e$ ist. Da dieser Beitrag aber von der Divergenz des Radiationstress-Tensors abgezogen wird, ist der Seegangsbeitrag zur mittleren Strömung um so größer je kleiner die Krümmung des Geschwindigkeitsprofils $v_e(\tilde{y})$ ist. Wenn die zweifache Ableitung von v_e dahingegen negativ und beschränkt $a < \partial_{\tilde{y}}^2 v_e < 0$ ($a \in \mathbb{R}$) ist, wird der Einfluss der Wellen auf die Dynamik der mittleren Strömung verstärkt. Der homogene Strömungszustand $\partial_{\tilde{y}}^2 v_e \approx 0$ ist hochgradig instabil. Eine solche Konfiguration besitzt Casimir-Beiträge $\sim v_e / \partial_{\tilde{y}}^2 v_e$ zu S_{ij} die enorm große Werte aufweisen. Sie begrenzen den Einfluss der anwachsenden Störung (Wellen) auf die mittlere Strömung. Zusätzlich wird der Seegangsbeitrag noch durch Dissipationsprozesse beschränkt, die bisher unberücksichtigt geblieben sind.

4.1 Beispiel1: Zweidimensionales, homogenes und inkompressibles Fluid

In diesem Kapitel wird der Seegangsbeitrag in den Bewegungsgleichungen für ein ausgesuchtes Beispiel berechnet. Es wird ein inkompressibles, nicht viskoses Fluid betrachtet, das im \mathbb{R}^2 einen einfach zusammenhängenden Bereich \mathcal{D} ausfüllt. Der äußere Rand des Gebietes $\partial\mathcal{D}$ sei durch zumindest stückweise glatte Kurven $\partial\mathcal{D}_i$ gegeben. Da der Einfluss variabler Topographie und sphärischer Geometrie der Erdoberfläche vernachlässigt wird, kann ein ortsfestes, kartesisches Koordinatensystem (x, y, z) eingeführt werden. Wir betrachten die Hydrodynamik entlang eines (x, y) -Schnittes des \mathbb{R}^3 in einer konstanten Tiefe $h = z_d - z_0$. Daher ist es sinnvoll eine separate Nomenklatur für die horizontalen $\underline{x} = (x, y)$ und die vertikalen $x_3 = z$ Koordinaten einzuführen. Die Eulerschen Gleichungen für das Geschwindigkeitsfeld $\underline{v}(\underline{x}, t)$ ($\underline{x} \in \mathbb{R}^2$) ergeben sich zu

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} = -\nabla p, \quad \nabla \cdot \underline{v} = 0, \quad \underline{v}(\underline{x}, 0) = \underline{v}_0(\underline{x}); \quad (\nabla \cdot \underline{v}_0 = 0). \quad (4.3)$$

Der Druck $p(\underline{x}, t)$ ist ein skalares Feld, das die Inkompressibilität des Mediums bzw. die Divergenzfreiheit des Vektorfeldes $(\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} + \nabla p$ gewährleistet ($\underline{v} \in \mathcal{X}_{div}(\mathcal{D})$). Für das hier betrachtete fluiddynamische Problem ist die über den Wasserkörper integrierte kinetische Energie eine Erhaltungsgröße. Das System (4.3) ist Hamiltonisch bezüglich einer für die Funktionale $H, F : \mathcal{X}_{div} \rightarrow \mathbb{R}$ gegebenen Poisson Klammer und kann in Form von Gleichung (3.2) formuliert werden.

$$H(\underline{v}) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} |\nabla \psi|^2 d^2 \underline{x}, \quad \{F, H\}(\underline{v}) = - \int_{\mathcal{D}} \underline{v} \cdot \left[\frac{\delta F}{\delta \underline{v}}, \frac{\delta H}{\delta \underline{v}} \right] d^2 \underline{x}. \quad (4.4)$$

Es werden glatte und divergenzfreie Vektorfelder $\underline{v} \in \mathcal{X}_{div}$ in \mathcal{D} betrachtet. In Gleichung (4.4) ist die Lie-Poisson Klammer $\{\cdot, \cdot\}$ der Gruppe der volumenerhaltenden Diffeomorphismen Diff_{vol} in \mathcal{D} mit der Lie-Algebra Klammer $[\cdot, \cdot]$ definiert worden. Diese ist gleich der Jacobi-Lie Klammer $[a, b] = (a \cdot \nabla) b - (b \cdot \nabla) a$ für die durch die Funktionalableitung in Richtung von \underline{v} gegebenen Vektorfelder $\delta F / \delta \underline{v}$, $\delta H / \delta \underline{v} \in \mathcal{X}_{div}$. Durch Einführen der Stromfunktion $\psi(x, y, t)$ ($\underline{v} = \nabla \times (\psi \hat{z})$) und Definieren der Vorticity $\omega(\underline{x}, t) = \hat{z} \cdot \nabla \times \underline{v} = -\nabla^2 \psi$ lässt sich die Bewegungsgleichung auch in der folgenden, alternativen Form hinschreiben.

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + \partial(\psi, \omega) = 0, \quad (4.5)$$

Dabei kennzeichnet $\partial(a, b)$ den zwei-dimensionale Jacobi-Operator, der wie folgt definiert ist $\partial(a, b) = a_x b_y - a_y b_x$. Wie üblich wird als Randbedingung vorausgesetzt, dass die Netto-Zirkulation $\Gamma = \oint_{\partial\mathcal{D}_i} \nabla \psi \cdot \underline{n} ds$ eine Konstante ist $d\Gamma/dt = 0$ und dass kein Fluss über den Rand hinweg auftritt. Letzteres folgt aus $(\oint_{\partial\mathcal{D}_i} \partial\psi/\partial n ds = 0)$ sowie den beiden Gleichungen $\nabla^2 \psi = 0$ beziehungsweise $\int_{\mathcal{D}} \psi \nabla^2 \psi d^2 \underline{x} = 0$, und $\sum_i \psi|_{\partial\mathcal{D}_i} = \sum_i c_i = 0$ nach Anwenden des ersten Greenschen Satzes, wobei \underline{n} der nach außen gerichtete Normalenvektor ist. Damit setzt sich der Vektorraum \mathcal{X}_{div} aus Zirkulationen $\Gamma_i \in \mathbb{R}^n$ und Wirbeln der Stärke $\underline{\omega} \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ zusammen. Das Gleichungssystem (4.5) ist Hamiltonisch [Sh90]

$$\frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} = J \frac{\delta H}{\delta \underline{\omega}}, \quad J = -\partial(\omega, \cdot), \quad H(\omega) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} |\nabla \psi|^2 d^2 \underline{x} \quad (4.6)$$

und besitzt die Casimir-Funktion C

$$C(\omega) = \int_{\mathcal{D}} \mathcal{C}(\omega) d^2 \underline{x}, \quad (4.7)$$

wobei $\mathcal{C}(\omega)$ eine beliebige, reellwertige Funktion ist. Da nach Kelvins Theorem die Gesamt-Zirkulation $\Gamma = \oint_{\partial\mathcal{D}_i} \nabla\psi \cdot \underline{n} \, ds$ ebenfalls eine Konstante ist, kann das Funktional $H + C$ noch um den additiven Term $\lambda \Gamma$ erweitert werden, wobei λ eine reellwertige Konstante ist. Da nach Anwenden des Gaußschen Integralsatzes die erste Variation des Hamiltonfunktionals H wie folgt umgeformt werden kann

$$\delta H = \int_{\mathcal{D}} \nabla\psi \cdot \delta\nabla\psi = \int_{\mathcal{D}} \nabla \cdot (\psi\delta\nabla\psi) \, d^2\underline{x} - \int_{\mathcal{D}} \psi\delta\nabla^2\psi \, d^2\underline{x} \quad (4.8)$$

$$= \oint_{\partial\mathcal{D}_i} \psi \delta\nabla\psi \cdot d\underline{s} + \int_{\mathcal{D}} \psi\delta\omega \, d^2\underline{x}, \quad (4.9)$$

erhält man für die erste Variation des Funktionals $H_C = H + C + \lambda \Gamma$ nach Zusammenfassen aller Terme den folgenden Ausdruck.

$$\delta H_C = \oint_{\partial\mathcal{D}_i} \lambda \delta\nabla\psi \cdot d\underline{s} + \int_{\mathcal{D}} \{\nabla\psi \cdot \delta\nabla\psi + C'(\omega)\delta\omega\} \, d^2\underline{x} \quad (4.10)$$

$$= \oint_{\partial\mathcal{D}_i} (\lambda + \psi) \delta\nabla\psi \cdot d\underline{s} + \int_{\mathcal{D}} \{\psi + C'(\omega)\}\delta\omega \, d^2\underline{x} \quad (4.11)$$

Gleichung (4.11) ist aus Gleichung (4.10) durch partielle Integration hervorgegangen. Formale Stabilität eines Gleichgewichts \underline{v}_e ist durch das Verschwinden der ersten Variation von H_C , ausgewertet für \underline{v}_e , gekennzeichnet $\delta H_C(\underline{v}_e) = 0$. Nach Gleichung (4.11) ist dies gegeben, wenn $\psi + C'(\omega) = 0$, was der Beziehung $C''(\omega_e) = -\psi' = v_e(\underline{X})/\partial_{\underline{y}}^2 v_e$ entspricht, und $\lambda = -\psi$. Der Vektor $\underline{v}_e = v_e(\underline{x}) \underline{\hat{x}}$ ist die Projektion des Geschwindigkeitsvektors der Eulerschen Strömung auf den Vektor $\underline{\hat{x}} \in \mathcal{D}$ des Basissystems \sum_2 (Kapitel 2.1). Um die Rechnung zu vereinfachen wird vorausgesetzt, dass $\underline{v}_e(\underline{\hat{x}})$ der Eulerschen Strömung entspricht. Im Koordinatensystem (\check{x}, \check{y}) des Seegangs wird der Geschwindigkeitsvektor $\underline{v}_e = (\partial_{\check{y}}\psi, -\partial_{\check{x}}\psi)$ durch die Stromfunktion $\psi_e \underline{\hat{z}}$ festgelegt. In diesem Fall ist die Ableitung $C''(\omega_e) = -\psi'$ gleich $-\partial\psi_e/\partial\omega_e = u\partial_{\check{y}}\omega_e^{-1} - v\partial_{\check{x}}\omega_e^{-1}$, was sich mit $\omega_e = -\nabla^2\psi_e$ umformen lässt zu $-\psi' = \sum_i v_{ei}/\{\partial_{\check{x}_j}^2 v_{ei} - \partial_{\check{x}_i}\partial_{\check{x}_j} v_{ej}\}$ ($i, j = \{1, 2\}$). Es bedeutet keine große Einschränkung anzunehmen, dass \underline{v}_e in Ausbreitungsrichtung der Wellen konstant ist $\partial_{\check{x}}\underline{v}_e \approx 0$, und der zweite Term im Zähler von $-\psi'$ verschwindet. Aus Gleichung (4.10) folgt für die zweite Variation von H_C und damit auch für den Hamiltonian $\delta^2 H_C$, der die zeitliche Entwicklung der Störung δv beschreibt

$$\delta^2 H_C(\underline{v}) = \int_{\mathcal{D}} \{|\delta\nabla\psi|^2 + C''(\omega)(\delta\omega)^2\} \, d^2\underline{x} \quad (4.12)$$

$$= \int_{\mathcal{D}} \{(\delta\underline{v})^2 + v_e/\partial_{\check{y}}^2 v_e (\delta\omega)^2\} \, d^2\underline{x}. \quad (4.13)$$

In Gleichung (4.13) wurde das Ergebnis $C''(v_e) = v_e/\partial_{\check{y}}^2 v_e$ der ersten Variation $\delta H_C(\underline{v}_e) = 0$ eingesetzt.

Welche Aussagen über die Stabilität der stationären Strömung sind ausgehend von Gleichung (4.13) möglich? Nach den beiden Kriterien von Arnold [Arn65a], [An66b] ist formale Stabilität von v_e verknüpft mit der positiv oder negativ Definitheit der quadratischen Form $\delta^2 H_C$. Bedingung dafür ist, dass $C''(v_e)$ entweder größer als Null ist (Arnold 1) oder aber eine untere Schranke nicht überschreitet (Arnold 2) (Poincare Ungleichung für das Gebiet D) $C''(v_e) < \delta\psi/\nabla^2\delta\psi$ ($|\delta\underline{v}|^2 = \delta\omega\delta\psi$). Da es in diesem Kapitel nicht um die Stabilitätseigenschaften der Lösung v_e geht, sondern der Einfluss der Wellenausbreitung auf die zeitliche Entwicklung der mittlere Strömung bestimmt werden soll, setzen wir formale Stabilität voraus.

In Hinblick auf die Bewegungsgleichung sind wir an der Ableitung $h_C = \delta^2 H_C/\delta\omega^2$ interessiert ($h_C\delta\omega = (\delta\psi/\delta\omega + v_e/\partial_{\check{y}}^2 v_e)\delta\omega$) und definieren um unhandliche Ausdrücke zu vermeiden den linearen Operator $\mathfrak{L} = \{[v_e/\partial_{\check{y}}^2 v_e]\nabla^2 - 1\}$ (es ist $h_C\delta\omega = -\mathfrak{L}\delta\psi$). Dabei wurde ausgenutzt, dass $\delta\omega = -\nabla^2\delta\psi$ gilt, woraus nach partieller Integration ($\delta\psi(\partial D_i) = 0$) die Beziehung $|\delta\nabla\psi|^2 =$

$-\delta\nabla^2\psi \delta\psi = \delta\omega \delta\psi$ folgt. Die Bewegungsgleichung (4.1) (setze $\varepsilon = 1$, $\delta\psi \equiv \delta^{(1)}\psi$) für die Stokesdrift $\langle \delta^{(2)}\omega \rangle$ (mit $\partial\omega_e/\partial T = -\overline{\text{ad}}(\delta H/\delta\omega_e)^* \omega_e$) ist gleich

$$\begin{aligned} \frac{\partial\omega_{sd}}{\partial T} &= \frac{1}{2\pi V} \int_0^{2\pi} \int_{\mathcal{D}} \int_{s(\zeta_1)}^{s(\zeta_2)} \left\{ \overline{\text{ad}} \left(\tilde{\mathfrak{L}} \delta^{(1)}\psi \right)^* \delta^{(1)}\omega + \overline{\text{ad}} \left(\tilde{\mathfrak{L}} \delta^{(2)}\psi \right)^* \omega_e \right\} dz d^2\underline{x} d\theta \\ &=: \frac{1}{2\pi V} \int_0^{2\pi} \int_{\mathcal{D}} \int_{s(\zeta_1)}^{s(\zeta_2)} \left\{ \text{div} \underline{\underline{\mathbb{S}}} + \underline{\underline{\mathbb{A}}} \right\} dz d^2\underline{x} d\theta. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Wenden wir uns jetzt der rechten Seite von Gleichung (4.14) zu und benutzen einen ebenen Wellen Ansatz ($\varepsilon = 1$) zur Beschreibung der Orbitalbewegung des Seegangs $\delta\psi = a(\underline{x}, z) \exp i\theta(\underline{k}, \underline{x}, t) + c.c.$, $\theta = (\underline{k} \cdot \underline{x} - \omega t)$. Da wir nur an den phasengemittelten Eigenschaften der Strömung interessiert sind brauchen die linearisierten Anteile der Ausgangsgleichung (3.3) in Gleichung (4.14) nicht berücksichtigt werden. Ungerade Potenzen der Phasenfunktionen $\sin(\theta)$ und $\cos(\theta)$ verschwinden nach Mittelung. Es können auch die Taylor-Glieder höherer Ordnung in ε vernachlässigt werden, da ihr einziger nicht verschwindender Beitrag aus Termen der Ordnung $O(\varepsilon^4)$ besteht. Vorerst sind wir nur an den Termen interessiert, die in niedrigster, nichtlinearer, also quadratischer Ordnung ($O(\varepsilon^2)$) auftreten.

Die auf der rechten Seite von Gleichung (4.14) nach Integration und Mittelung noch bestehenden Terme bestimmen die Dynamik der mittleren Strömung. Nach partieller Integration² von $\overline{\text{ad}}(\tilde{\mathfrak{L}}\delta\psi)^*\omega$ lässt sich aus Gleichung (4.14) ein Ausdruck für die Lie-Poisson Klammer des $O(\varepsilon^2)$ -Anteils der Störungsentwicklung herleiten. Dazu wird in Gleichung (4.14) das Funktional F als Dummy-Variable eingeführt und später gleich $\delta^{(1)}\omega$ gesetzt.

$$\begin{aligned} \overline{\text{ad}}_{\frac{\delta(F)}{\delta(\delta^{(1)}\omega)}} \left(\tilde{h}_C \delta^{(1)}\omega \right)^* \delta^{(1)}\omega &= \left\langle \delta^{(1)}\omega, \left[\frac{\delta(F)}{\delta(\delta^{(1)}\omega)}, \tilde{h}_C \delta^{(1)}\omega \right] \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\delta(F)}{\delta(\delta^{(1)}\omega)}, \partial \left(\tilde{h}_C \delta^{(1)}\omega, \delta^{(1)}\omega \right) \right\rangle \end{aligned} \quad (4.15)$$

Aufgrund der Eigenschaften der Jacobi-Lie Klammer ist gegeben, dass

$$[a, b] = \partial(a, b) = \partial_x a \partial_y b - \partial_y a \partial_x b \quad (4.16)$$

$$= \partial_y (\partial_x a b) - \partial_x (\partial_y a b) = \hat{\underline{z}} \cdot \nabla \times ([\nabla a]b) \text{ ist,} \quad (4.17)$$

wobei $\hat{\underline{z}}$ der Einheitsvektor in Richtung der Vertikalen ist. Nach Einsetzen der Funktionalableitung $h_C \delta^{(1)}\omega = (\delta^2 H_C / \delta\omega^2 \cdot \delta\omega)|_{\delta\omega=\delta^{(1)}\omega}$

$$\tilde{h}_C \delta^{(1)}\omega = \delta^{(1)}\psi - \frac{v_e}{\partial_y^2 v_e} \left(\frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} - k^2 \right) \delta^{(1)}\psi$$

in Gleichung (4.15) beziehungsweise (4.14), erhält man für den Divergenz-Term des Tensors $\underline{\underline{\mathbb{S}}}$ den folgenden Ausdruck ($\delta^{(1)}\omega = -[\partial_{\tilde{y}}^2 - k^2]\delta^{(1)}\psi$ und $\tilde{\nabla} = (ik, \partial_{\tilde{y}})$)

$$\text{div} \underline{\underline{\mathbb{S}}}(\delta^{(1)}\omega) = -\hat{\underline{z}} \cdot \tilde{\nabla} \times \left[\delta^{(1)}\underline{\omega} \times \delta^{(1)}\underline{v} + \tilde{\nabla} \frac{|\delta^{(1)}\underline{v}|^2}{2} + \frac{v_e}{\partial_y^2 v_e} \tilde{\nabla} \frac{\delta^{(1)}\omega^2}{2} \right]. \quad (4.18)$$

²Unter Ausnutzung der Beziehung (4.17) erhält man nach partieller Integration der rechten Seite von (4.14) $\int_D \partial(\odot, 2h_C \delta\omega)\omega d\underline{x}^2 = \int_D \hat{\underline{z}} \cdot \nabla \times (\nabla[2h_C \delta\omega] \odot \omega) d\underline{x}^2 + \int_D \odot \partial(2h_C \delta\omega, \omega) \underline{x}^2$. Dabei kennzeichnet \odot den offenen Eingang der Jacobi-Lie Klammer. Nach Anwenden des Stokeschen Integralsatzes fällt der erste Term weg, da der Gradient von $h_C \delta^{(1)}\omega$ stets senkrecht auf dem Normalenvektor der Randkurve ∂D steht.

Auf der rechten Seite von Gleichung (4.18) wurde die Null $\text{rot}(\text{grad}|\delta^{(1)}v|^2/2) = 0$ zu der Divergenz von $\underline{\underline{S}}$ addiert. Aufgrund der Vektor-Identität $\underline{\omega} \times \underline{v} = (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} - \nabla|\underline{v}|^2/2$ lassen sich die ersten beiden Terme auf der rechten Seite von Gleichung (4.18), $\delta^{(1)}\underline{\omega} \nabla \delta^{(1)}\psi = -\delta^{(1)}\underline{\omega} \times \delta^{(1)}\underline{v}$ und $\overline{\nabla}|\delta^{(1)}\underline{v}|^2/2$, zusammenfassen.

$$\text{div } \underline{\underline{S}}(\delta^{(1)}\underline{v}) = -\mathbb{P} \left((\delta^{(1)}\underline{v} \cdot \overline{\nabla}) \delta^{(1)}\underline{v} \right) - \frac{v_e}{2\partial_y^2 v_e} \overline{\nabla} \left[- \left(\frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2} - k^2 \right) \delta^{(1)}\psi \right]^2 \quad (4.19)$$

Die in den Gleichungen (4.19) eingeführte Transformation $\mathbb{P} : \mathcal{X}(D) \rightarrow \mathcal{X}_{div}(D)$ bildet ein Vektorfeld $\underline{v} \in \mathcal{X}(D)$ auf das entsprechende, quellen- und senkenfreie Feld $\mathbb{P}(\underline{v}) \in \mathcal{X}_{div}(D)$ mittels L^2 Orthogonalprojektion ab. So kann das Vektorfeld $(\delta^{(1)}\underline{v} \cdot \nabla) \delta^{(1)}\underline{v}$ in einen divergenzfreien Anteil $\mathbb{P}((\delta^{(1)}\underline{v} \cdot \nabla) \delta^{(1)}\underline{v})$ und ein Gradientenfeld $-\nabla \delta^{(1)}p$ zerlegt werden $\mathbb{P}((\delta^{(1)}\underline{v} \cdot \nabla) \delta^{(1)}\underline{v}) = (\delta^{(1)}\underline{v} \cdot \nabla) \delta^{(1)}\underline{v} + \nabla \delta^{(1)}p$. Dabei kennzeichnet $\delta^{(1)}p$ die horizontale Störung des Druckfeldes³. Der im Eingang des Projektionsoperators \mathbb{P} befindliche Term lässt sich unter Zuhilfenahme der Kontinuitätsgleichung $\text{div}(\delta^{(1)}\underline{v}) = 0$ weiter umformen $(\delta^{(1)}\underline{v} \cdot \nabla) \delta^{(1)}\underline{v} = \nabla \cdot (\delta^{(1)}\underline{v} \otimes \delta^{(1)}\underline{v})$. In dieser Gleichung kennzeichnet \otimes das tensorielle Produkt des Vektors $\delta^{(1)}\underline{v} \in \mathcal{D}$ mit sich selbst.

Auf die gleiche Weise kann für den Vektor $\underline{\underline{A}}$ das folgende Ergebnis hergeleitet werden.

$$(h_e \delta^{(2)}\omega = (\delta^2 H_C / \delta \omega^2 \cdot \delta \omega)|_{\delta \omega = \delta^{(2)}\omega})$$

$$\underline{\underline{A}}(\delta^{(2)}\omega) = -\hat{z} \cdot \overline{\nabla} \times \left[\underline{\omega}_e \times \delta^{(2)}\underline{v} + \overline{\nabla} (\underline{v}_e \cdot \delta^{(2)}\underline{v}) + \frac{v_e}{\delta_y^2 v_e} \underline{\omega}_e \cdot \overline{\nabla} \delta^{(2)}\underline{\omega} \right] \quad (4.20)$$

$$\underline{\underline{A}}(\delta^{(2)}\underline{v}) = -\mathbb{P} \left((\underline{v}_e \cdot \overline{\nabla}) \delta^{(2)}\underline{v} + \underline{v}_e \times \delta^{(2)}\underline{\omega} + (\delta^{(2)}\underline{v} \cdot \overline{\nabla}) \underline{v}_e \right) - \frac{v_e}{\partial_y^2 v_e} \underline{\omega}_e \cdot \overline{\nabla} \delta^{(2)}\underline{\omega} \quad (4.21)$$

Der erste Term auf der rechten Seite von Gleichung (4.21) entspricht der advektiven Ableitung der Stokesdrift $\underline{v}_{sd} = \langle \delta^{(2)}\underline{v} \rangle$, nach Mittelung über die Phase der Wellen. Die Advektion der Eulerschen Strömung \underline{v}_e aufgrund von Stokesdrift wird durch den Beitrag $\overline{\text{ad}}(\delta H_C / \delta \omega_e)^* \delta^{(2)}\omega$ beschrieben und ist gleich Null (Einstieg Kapitel 4). Zusammen mit der partiellen Zeitableitung der Stokesdrift und der Bilanzgleichung $\partial \underline{v}_e / \partial T = -\overline{\text{ad}}(\delta H / \delta \underline{v}_e)^* \underline{v}_e = -(\underline{v}_e \cdot \overline{\nabla}) \underline{v}_e - \overline{\nabla} p_e$ für die Eulersche Strömung können diese Terme zur totalen Zeitableitung der mittleren Geschwindigkeit $\underline{v}_e + \underline{v}_{sd}$ zusammengefasst werden. Gleichung (4.24) ist eine gewöhnlichen Differentialgleichung für die mittlere Strömung.

Die Impulsbilanzgleichung der mittleren Strömung enthält zwei nach Phasenmittelung residuale Beiträge des Seegangs. Zum einen ist dies der Divergenz-Term des Radiationstress-Tensors $\text{div } \underline{\underline{S}}_1$ (4.22). Dieser Beitrag kann auch durch Einsetzen des Störansatzes $(\underline{v}, p) = (\underline{v}_e + \delta \underline{v}, p_e + \delta p)$ in die Ausgangsgleichungen⁴ (4.3) herleitet werden.

$$\text{div } \underline{\underline{S}}_1 = -\overline{\nabla} \cdot \delta^{(1)}\underline{v} \otimes \delta^{(1)}\underline{v} - \overline{\nabla} \delta^{(1)}p \quad (4.22)$$

Zum anderen enthält die Bilanzgleichung noch den mittleren Impulsbeitrag des zweiten Terms auf der rechten Seite von Gleichung (4.19). Dieser Anteil beschreibt den Einfluss der Euler-Strömung v_e auf die zeitliche Entwicklung der Stokesdrift. Bei der Umsetzung der theoretischen Ergebnisse in das numerische Modell für Seegang und Strömung wurde dieser Beitrag nicht berücksichtigt. Die Formulierung der Impulsbilanzgleichung enthält nur den mittleren, welleninduzierten Strömungsbeitrag des Seegangs, wie er aus (4.22) durch Integration über das Volumen V der Wassersäule und anschließender Phasenmittelung hergeleitet werden kann.

$$\text{div } \underline{\underline{S}}_2 = -\frac{v_e}{\partial_y^2 v_e} \overline{\nabla} \frac{\delta^{(1)}\omega^2}{2} = -\frac{v_e}{\partial_y^2 v_e} \overline{\nabla} \left[\frac{[-\partial_{\bar{y}}^2 + k^2] \delta^{(1)}\psi}{2 \delta^{(1)}\psi} |\delta^{(1)}\underline{v}|^2 \right] \equiv -\frac{v_e k^2}{\partial_y^2 v_e} \overline{\nabla} \frac{|\delta^{(1)}\underline{v}|^2}{2}. \quad (4.23)$$

³Die Einführung des Druckes als Lagrange-Parameter sorgt für die Divergenzfreiheit des Geschwindigkeitsfeldes.

⁴Nach dem Einführen des Druckes p .

Im letzten Schritt der Umformung wurde $\partial_{\hat{y}}^2 \delta^{(1)} \psi \equiv 0$ gesetzt. Die Einbettung der zwei-dimensionalen Koordinatenflächen in den dreidimensionalen Orts-Raum Kap.[4.3] führt zu einer tiefenabhängigen Formulierung der Bewegungsgleichungen (4.24) (mit $\text{div}(\delta^{(1)} \underline{v}) = 0$) für die mittlere Strömung $\langle \underline{v} \rangle = \underline{v}_e + \underline{v}_{sd}$.

$$\frac{\partial \langle \underline{v} \rangle}{\partial T} = - (\langle \underline{v} \rangle \cdot \overline{\nabla}) \langle \underline{v} \rangle - \overline{\nabla} p_e - \overline{\nabla} \cdot \underline{\underline{S}} \quad \text{mit} \quad \underline{\underline{S}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\mathcal{D}} \int_{s(\zeta_1)}^{s(\zeta_2)} \underline{\underline{S}}_1 dz d^2 \underline{x} d\theta \quad (4.24)$$

Falls sich die Trajektorie der mittleren dreidimensionalen Strömung für alle Zeiten auf einer Äquipotentialfläche ($x, y, z = \text{konst.}$) des Gravitationsfeldes befindet, ist Gleichung (4.24) zu dem Ergebnis (10.51) aus Kapitel [10.5] äquivalent.

Die in [3.2.2] hergeleitete Erhaltungsgleichung für die Größe Wellenwirkung entspricht $dI/dT = 0$. Für einen zwei-dimensionalen Fluss in einem inkompressiblen Fluid besitzt I die folgende Gestalt ($h_c \delta^{(1)} v_i = (\delta^2 H_C / \delta v_i^2 \cdot \delta v_i)|_{\delta v_i = \delta^{(1)} v_i}$)

$$I = \frac{\mathcal{E}\mathcal{F}}{\sigma} = \frac{\mathcal{E}}{\sigma} \left\langle \delta^{(1)} v_f, \hat{h}_c \delta^{(1)} v_i \right\rangle = \frac{\mathcal{E}}{\sigma} \delta_{if} + \frac{\mathcal{E} v_e k^2}{\sigma \partial_{\hat{y}}^2 v_e} \delta_{if} . \quad (4.25)$$

Dabei wurde erneut vorausgesetzt, dass $\partial_{\hat{y}}^2 \delta^{(1)} \psi$ gleich Null ist woraus $\delta^{(1)} \omega = k^2 \delta^{(1)} \psi$ folgt. Außerdem wurde $|\delta^{(1)} \underline{v}|^2 = \delta^{(1)} \omega \delta^{(1)} \psi$ gesetzt und die Kronecker-Relation $\langle \delta^{(1)} v_f, \delta^{(1)} v_i \rangle = \delta_{if}$ eingeführt.

4.2 Beispiel2: Der Radiationstress eines Flachwasser-Systems

Die horizontale Bewegung eines homogenen und flachen Gewässers in einem mit der Erdrotation mitbewegten Koordinatensystem wird durch die Bewegungsgleichungen (4.26) und (4.27) beschrieben. Das verwendete Koordinatensystem $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $f/2$ um die vertikale \hat{z} -Achse herum.

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} + f \hat{z} \times \underline{v} = -g \nabla h \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (h \underline{v}) = 0 . \quad (4.27)$$

In den Gleichungen (4.26), (4.27) kennzeichnet $\underline{v}(\underline{x}, t)$ die horizontale Komponente der Strömungsgeschwindigkeit $\underline{x} = (x, y)$, $h(\underline{x})$ die lokale Wassertiefe und g die Gravitationskonstante. Das System partieller Differentialgleichungen kann in Form Hamiltonischer Gleichungen (3.2) für den Variablen-satz $\underline{u} = (\underline{v}, h)$ hingeschrieben werden [Sh90]. In diesem Kapitel wird eine alternative Formulierung der Hamiltonschen Gleichungen für den Satz von einander abhängiger Variablen $\underline{u} = (\underline{m} = h \underline{v}, h)$ und $f = 0$ verwendet. Siehe dazu auch Holm et al. [Hol84] (Kapitel 3.4). Für eine konstante Dichte $\rho_w = 1 \text{ kg/m}^3$ des Meerwassers entspricht $\underline{m} = h \underline{v}$ der Flächendichte des Massenflusses $\int_{\mathcal{D}} \rho \underline{v} d^3 \underline{x}$. Der Hamiltonian $H(\underline{m}(\underline{x}, t), t)$ entspricht dem von \underline{m} und h abhängigen Funktional (4.28).

$$H(\underline{m}, h) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{|\underline{m}|^2}{h} + gh^2 \right) d^2 \underline{x} \quad (4.28)$$

Das Funktional H_C setzt sich aus dem Hamiltonfunktional (4.28) und den Casimirkfunktionen

$$C = \int_{\mathcal{D}} h \mathcal{C}(q) d^2 \underline{x} \quad \text{mit} \quad q = \frac{\hat{z} \cdot \nabla \times \underline{v} + f}{h} \equiv \frac{\omega}{h} \quad (4.29)$$

zusammen, wobei q die potentielle Vorticity und $\mathcal{C}(q)$ eine beliebige reellwertige Funktion von q ist. Im Falle eines ruhenden Bezugssystems (Winkelgeschwindigkeit $f/2 = 0$) ist q gleich dem Quotienten ω/h . Die Poisson-Klammer ist gleich

$$\begin{aligned} \{F, H\}(\underline{m}, h) &= \int_{\mathcal{D}} \left\{ \underline{m} \cdot \left[\left(\frac{\delta H}{\delta \underline{m}} \cdot \nabla \right) \frac{\delta F}{\delta \underline{m}} - \left(\frac{\delta F}{\delta \underline{m}} \cdot \nabla \right) \frac{\delta H}{\delta \underline{m}} \right] + \right. \\ &\quad \left. + h \left[\frac{\delta H}{\delta \underline{m}} \cdot \nabla \frac{\delta F}{\delta h} - \frac{\delta F}{\delta \underline{m}} \cdot \nabla \frac{\delta H}{\delta h} \right] \right\} d^2 \underline{x}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Wie im vorigen Kapitel (4.1) besteht der erste Schritt bei der Berechnung der Divergenz des Radiationstress-Tensors in der Variation des Energiefunktional $H_C = H + C + \sum_i \lambda_i \oint \underline{m}/h \cdot d\underline{s}$. Die erste Variation des Funktional H_C ausgewertet am Fixpunkt $\underline{u} = \underline{u}_e$ des Systems ist gleich

$$\begin{aligned} 0 = \delta H_C &= \int_{\mathcal{D}} \left[\frac{\underline{m} \cdot \delta \underline{m}}{h} + \mathcal{C}'(q) \delta \omega \right] \Big|_{\underline{u}_e} d^2 \underline{x} + \sum_i \lambda_i \oint \frac{\delta \underline{m}}{h_e} \cdot d\underline{s} - \\ &- \int_{\mathcal{D}} \left[\frac{|\underline{m}|^2}{2h^2} - gh - \mathcal{C}(q) + \mathcal{C}'(q) q \right] \delta h \Big|_{\underline{u}_e} d^2 \underline{x} - \sum_i \lambda_i \oint \frac{m_e}{h_e^2} \delta h \cdot d\underline{s}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Bevor das Integral (4.31) für $\underline{u} = \underline{u}_e$ ausgewertet werden kann, muss der erste Term in dieser Gleichung noch partiell integriert werden.

$$\int_{\mathcal{D}} \mathcal{C}'(q_e) (\hat{\underline{z}} \cdot \nabla \times \delta \underline{v}) d^2 \underline{x} = \sum_i \oint_{\partial D_i} \mathcal{C}'(q_e) \delta \underline{v} \cdot d\underline{s} - \int_{\mathcal{D}} (\hat{\underline{z}} \times \nabla \mathcal{C}'(q_e)) \cdot \delta \underline{v} d^2 \underline{x}$$

Nach Einsetzen von $h \delta \underline{v} = \delta \underline{m} - \underline{m} \delta h/h$ in die obige Gleichung erhält man aus (4.31) eine Bestimmungsgleichung für das Casimirkunktional $\mathcal{C}(q_e)$ (\boxplus' entspricht der Ableitung von \boxplus nach q).

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathcal{D}} \left[\underline{m}_e - \hat{\underline{z}} \times \nabla \mathcal{C}' \right] \cdot \frac{\delta \underline{m}}{h_e} d^2 \underline{x} + \sum_i \oint (\mathcal{C}' + \lambda_i) \left[\frac{\delta \underline{m}}{h_e} - \frac{m_e}{h_e^2} \delta h \right] \cdot d\underline{s} - \\ &- \int_{\mathcal{D}} \left[\frac{|\underline{m}_e|^2}{2h_e^2} - gh_e - \mathcal{C} + \mathcal{C}' q_e - \hat{\underline{z}} \times \nabla \mathcal{C}' \cdot \frac{m_e}{h_e^2} \right] \delta h d^2 \underline{x}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Nach Voraussetzung ist der Gleichgewichtszustand $\underline{u}_e = (\underline{m}_e, h_e)$ formal stabil. Deshalb ist die erste Variation von H_C ausgewertet am Fixpunkt $\underline{u} = \underline{u}_e$ ($\delta H_C(\underline{m}, h)|_{\underline{m}_e, h_e} = 0$) gleich Null und die zweiten Variation von H_C ist positiv oder negativ definit. In Gleichung (4.32) ($\delta H_C = 0$) verschwinden die drei Integrale separat.

$$(1) : \hat{\underline{z}} \times \nabla \mathcal{C}' = \underline{m}_e \quad \text{und} \quad (2) : \mathcal{C}'(q_e) \Big|_{\partial D_i} = -\lambda_i \quad (4.33)$$

$$\text{und} \quad (3) : \mathcal{C}' q_e = \frac{|\underline{m}_e|^2}{2h_e^2} + gh_e + \mathcal{C} =: \mathcal{K}(q_e) + \mathcal{C}(q_e) \quad (4.34)$$

Die reellwertige und glatte Funktion $\mathcal{K}(q_e)$ (Bernoulli-Funktion) ist die stationäre Lösung (4.35) der Ausgangsgleichungen (4.26) ($\underline{u} = \underline{u}_e$).

$$\frac{\partial \underline{v}_e}{\partial t} = 0 = -\nabla \frac{|\underline{v}_e|^2}{2} - \nabla gh_e = -\nabla \mathcal{K}(q_e) \quad (4.35)$$

Aus der Stabilitätsbedingung (4.34)(3) und (4.35) lässt sich ein Ausdruck für die zweifache Ableitung von \mathcal{C} nach q herleiten.

$$\mathcal{C}''(q_e) = \frac{\mathcal{K}'(q_e)}{q_e} = \frac{m_e}{q_e} \left(\frac{\partial \omega_e}{\partial v_e} \right)^{-1} - \frac{gh_e}{q_e^2} \quad (4.36)$$

Die zweite Variation des Energiefunktionals H_C liefert nach Einsetzen der Beziehung (4.33) und (4.36) den folgenden Ausdruck für $\delta^2 H_C(\underline{m}, h)|_{(\underline{m}_e, h_e)}$.

$$\begin{aligned} \delta^2 H_C(\underline{m}_e, h_e) &= \int_{\mathcal{D}} \left\{ \frac{|\delta \underline{m}|^2}{h_e} - 2 \frac{m_e}{h_e^2} \cdot \delta \underline{m} \delta h + \left[\frac{m_e}{h_e^3} + g \right] \delta h^2 \right\} d^2 \underline{x} \\ &+ \int_{\mathcal{D}} \frac{\mathcal{K}'(q_e)}{q_e} h_e \delta q^2 d^2 \underline{x} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Durch Einsetzen des Energiefunktionals (4.37) in die Poisson-Klammer (4.42) erhält man einen Satz partieller Differentialgleichungen (4.43), (4.44) für das in Kapitel (4) betrachtete Anfangswertproblem. Die zu $\mathcal{E} = a^{(1)}(a^{(1)})^*$ proportionalen Anteile ($\delta \underline{m}|_{\mathcal{E}} = \delta^{(1)} h \delta^{(1)} \underline{v}$, $\delta h|_{\mathcal{E}}$) der Störungs-Entwicklung des dynamischen Vektors (\underline{m}, h) um den stationären Punkt (\underline{m}_e, h_e) herum sind Lösungen dieser Gleichungen. In (4.42) kennzeichnen $\mathfrak{L}_{\delta \underline{m}}$ und $\mathfrak{L}_{\delta h}$ die Funktionalableitung von $\delta^2 H_C$ nach δh^5 bzw. $\delta \underline{m}$.

$$\mathfrak{L}_{\delta \underline{m}}(\delta^2 H_C) := \frac{1}{2} \frac{\delta(\delta^2 H_C)}{\delta(\delta \underline{m})} = \frac{\delta \underline{m}}{h_e} - \frac{m_e}{h_e^2} \delta h + \mathcal{K}' \frac{\delta q}{q_e h_e} \frac{\delta(\delta \omega)}{\delta(\delta \underline{v})} = \delta \underline{v} + \mathcal{K}' \frac{\delta q}{q_e h_e} \frac{\delta(\delta \omega)}{\delta(\delta \underline{v})} \quad (4.38)$$

$$\mathfrak{L}_{\delta h}(\delta^2 H_C) := \frac{1}{2} \frac{\delta(\delta^2 H_C)}{\delta(\delta h)} = g \delta h - \mathcal{K}' \delta q. \quad (4.39)$$

In Gleichung (4.38) wurde die Identität (4.40) eingesetzt, die sich aus der Definition der Variablen $\underline{m} = h \underline{v}$, $\delta \underline{m} = h_e \delta \underline{v} + \underline{v}_e \delta h$, ergibt.

$$\frac{\delta \underline{m}}{h_e} - \frac{m_e}{h_e^2} \delta h = \delta \underline{v}. \quad (4.40)$$

Für das in Kapitel [4.1] behandelte Beispiel eines ebenen Flusses mit parallelen Stromlinien $\underline{v}_e = v_e(\tilde{y}) \tilde{\underline{x}}$ und $h_e = \text{konst.}$ ist die potentielle Vorticity q_e gleich $q_e = -\partial_{\tilde{y}} v_e / h_e$ und die Ableitung \mathcal{K}' der Bernoulli-Funktion \mathcal{K} ist gleich

$$\mathcal{K}' = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q_e} = v_e \frac{\partial v_e}{\partial q_e} - g \frac{\partial h_e}{\partial q_e} = -v_e \frac{h_e \partial_{\tilde{y}} v_e}{\partial_{\tilde{y}}^2 v_e} + g \frac{h_e}{q_e} = q_e h_e^2 \frac{v_e}{\partial_{\tilde{y}}^2 v_e} + g \frac{h_e}{q_e}. \quad (4.41)$$

Die nichtlinearen Anteile des Flachwasser-Systems (4.28), (4.29) und (4.30) sind in niedrigster Ordnung gleich (4.42), wenn nach Einsetzen von $\mathfrak{L}(\delta \underline{u})$ in die rechte Seite der Gleichung (4.42) die Dummy-Variable $F(\delta \underline{u}) = \delta^{(1)} \underline{u}$ und $\delta \underline{u} = \delta^{(1)} \underline{u}$ gesetzt werden. Wie auch im vorigen Abschnitt 4.1 wird die Lösung der linearisierten Ausgangsgleichungen (4.26), (4.27) als bekannt vorausgesetzt.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta^{(2)} \underline{u}}{\partial T} &= \overline{\text{ad}}_{\frac{\delta(F)}{\delta(\delta^{(1)} \underline{u})}} \left(\frac{1}{2} \frac{\delta(\delta^2 H_C)}{\delta(\delta \underline{u})} \Big|_{\delta \underline{u} = \delta^{(1)} \underline{u}} \right)^* \delta^{(1)} \underline{u} + \underline{\mathbb{A}} \\ &= \int_{\mathcal{D}} \left\{ \delta^{(1)} \underline{m} \cdot \left[\left(\mathfrak{L}_{\delta^{(1)} \underline{m}}(\delta^2 H_C) \cdot \nabla \right) \frac{\delta(F)}{\delta(\delta^{(1)} \underline{m})} - \left(\frac{\delta(F)}{\delta(\delta^{(1)} \underline{m})} \cdot \nabla \right) \mathfrak{L}_{\delta^{(1)} \underline{m}}(\delta^2 H_C) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \delta^{(1)} h \left[\mathfrak{L}_{\delta^{(1)} \underline{m}}(\delta^2 H_C) \cdot \nabla \frac{\delta(F)}{\delta(\delta^{(1)} h)} - \frac{\delta(F)}{\delta(\delta^{(1)} \underline{m})} \cdot \nabla \mathfrak{L}_{\delta^{(1)} h}(\delta^2 H_C) \right] \right\} d^2 \underline{x} + \underline{\mathbb{A}} \end{aligned} \quad (4.42)$$

⁵Bei der Ableitung $\mathfrak{L}_{\delta h}$ muss die Kettenregel beachtet werden da $\delta \underline{m}$ von δh abhängt.

Nach vertikaler Integration und Mittelung der Terme enthält die rechte Seite von Gleichung (4.42) die Divergenz des Radiationstress-Tensor S_{ij} . Wie auch schon im vorigen Kapitel ist der in (4.42) eingeführte Vektor $\underline{\mathbb{A}}$ gleich $\overline{\text{ad}}(\tilde{h}_C \delta^{(2)} \underline{u})^* \underline{u}_e$ mit $\tilde{h}_C \delta^{(2)} \underline{u} = (1/2) \delta(\delta^2 H_C) / \delta(\delta \underline{u})|_{\delta \underline{u} = \delta^{(2)} \underline{u}}$.

Nach partieller Integration des zweiten Summanden von (4.42) ($\delta(\delta^{(1)} h) / \delta(\delta^{(1)} \underline{m}) = 0$) erhält man für $F = \delta^{(1)} h$ (mit (4.38), (4.41), (4.45) und $q_e = -\partial_{\bar{y}} v_e / h_e$) die folgende Differentialgleichung.

$$\frac{\partial \delta^{(2)} h}{\partial T} = - \underbrace{\left[2 \frac{v_e k^2}{\partial_{\bar{y}}^2 v_e} - 2 \frac{g h_e k^2}{(\partial_{\bar{y}} v_e)^2} + 1 \right]}_{=: \mathcal{F}_\alpha} \delta^{(1)} \underline{v} \cdot \bar{\nabla} \delta^{(1)} h + \underline{\mathbb{A}}(h) \quad (4.43)$$

Dahingegen erhält man für $F = \delta^{(1)} \underline{m}$ (mit $\delta(\delta^{(1)} \underline{m}) / \delta(\delta^{(1)} h) = \underline{v}_e$) nach partieller Integration des ersten Terms auf der rechten Seite von Gleichung (4.42) das folgende Ergebnis.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta^{(2)} \underline{m}}{\partial T} = & - \left(\mathcal{F}_\alpha \delta^{(1)} \underline{v} \cdot \bar{\nabla} \right) \delta^{(1)} \underline{m} - \left(\delta^{(1)} \underline{m} \cdot \bar{\nabla} \right) \mathcal{F}_\alpha \delta^{(1)} \underline{v} + \delta^{(1)} h \left(\mathcal{F}_\alpha \delta^{(1)} \underline{v} \cdot \bar{\nabla} \right) \underline{v}_e - \\ & - g \bar{\nabla} \frac{\delta^{(1)} h^2}{2} - \delta^{(1)} h \bar{\nabla} \underbrace{\left[-\frac{\partial_{\bar{y}} v_e^2}{2 \partial_{\bar{y}}^2 v_e} + \frac{g h_e}{\partial_{\bar{y}} v_e} \right]}_{=: \mathcal{F}_\beta} \left(h_e \delta^{(1)} q \right) + \underline{\mathbb{A}}(\underline{m}) \end{aligned} \quad (4.44)$$

In den Gleichungen (4.43) und (4.44) wurde das Ergebnis der Nebenrechnung (4.45) eingesetzt und die Definition von \mathcal{F}_α aus (4.43) verwendet. Im letzten Schritt von (4.45) ist die Ableitung $\partial_{\bar{y}}^2 \delta^{(1)} \psi$ erneut gleich Null gesetzt worden. Außerdem ist $\delta^{(1)} q / \delta^{(1)} \psi = \delta^{(1)} \omega / h_e$, da $\delta^{(1)} h / \delta^{(1)} \psi = 0$.

$$\delta^{(1)} q \frac{\delta(\delta^{(1)} \omega)}{\delta(\delta^{(1)} v)} = \delta^{(1)} q \frac{\delta |\delta^{(1)} \underline{v}|^2 / \delta^{(1)} \psi}{\delta(\delta^{(1)} v)} = 2 \delta^{(1)} \underline{v} \frac{\delta^{(1)} q}{\delta^{(1)} \psi} = -2 \delta^{(1)} \underline{v} \frac{[\partial_{\bar{y}}^2 - k^2] \delta^{(1)} \psi}{h_e \delta^{(1)} \psi} \equiv 2 \frac{k^2}{h_e} \delta^{(1)} \underline{v} \quad (4.45)$$

Die Gleichungen (4.43) und (4.44) bilden zusammen mit der linearen Seegangsgleichung (3.39) ein geschlossenes System partieller Differentialgleichungen für den Beitrag des Seegangs ($\langle \delta^{(2)} \underline{m} \rangle, \langle \delta^{(1)} h \rangle$) zur Dynamik der mittleren Strömung. Nach Integration über das Volumen V der Wassersäule und Mittelung über die Phase ϑ der Wellen enthält die rechte Seite der Gleichung (4.44) die Divergenz des Radiationstress als generalisierte Kraft. Die mittlere Strömung ändert ihren Bewegungszustand aufgrund des Wirkens dieser Kraft. Der in Gleichung (4.58) hergeleitete Ausdruck für $\underline{m}_{sd} = \langle \delta^{(2)} \underline{m} \rangle \equiv \langle \delta^{(1)} h \delta^{(1)} \underline{v} \rangle$ entspricht der vertikal integrierten Stokesdrift $\langle \delta^{(2)} \underline{v} \rangle$.

Die advective Ableitung von $\delta^{(2)} h$ und $\delta^{(2)} \underline{m}$ ist aufgrund der geforderten Stabilität von (h_e, \underline{m}_e) gleich Null. Da $\overline{\text{ad}}(\delta H_C / \delta \underline{u}|_{\underline{u}_e})^* \delta^{(2)} \underline{u} = 0$ ist, muss $[\underline{m}_e - \hat{z} \times \nabla C'] / h_e \cdot \bar{\nabla} \delta^{(2)} \underline{u}$ (4.33) und auch $\delta^{(2)} h \bar{\nabla} [\mathcal{K} + \mathcal{C} - \mathcal{C}' q_e]$ (4.34) gleich Null sein. In dem ursprünglichen Hamiltonschen System, mit H anstelle von H_C , sind die Terme in den beiden eckigen Klammern gleich $\underline{v}_e \neq 0$ und $\mathcal{K} \neq 0$.

Nach Mittelung über die Phase der Wellen beschreiben $\underline{\mathbb{A}}(\underline{m})$ und $\underline{\mathbb{A}}(h)$ in Gleichung (4.43), (4.44) die Advektion der Gleichgewichtsgrößen (h_e, \underline{m}_e) (Masse und Impuls) durch die Stokesdrift $\langle \delta^{(2)} \underline{v} \rangle$.

$$\underline{\mathbb{A}}(h) = \overline{\text{ad}} \left(\tilde{h}_C \delta^{(2)} \underline{u} \right)^* \underline{u}_e = -\mathcal{F}_\alpha \delta^{(2)} \underline{v} \cdot \bar{\nabla} h_e \quad \text{und} \quad (4.46)$$

$$\underline{\mathbb{A}}(\underline{m}) = -(\mathcal{F}_\alpha \delta^{(2)} \underline{v} \cdot \bar{\nabla}) \underline{m}_e - (\underline{m}_e \cdot \bar{\nabla}) \mathcal{F}_\alpha \delta^{(2)} \underline{v} - g h_e \bar{\nabla} \delta^{(2)} h - \underline{v}_e \underline{\mathbb{A}}(h) - h_e \bar{\nabla} \left[\mathcal{F}_\beta h_e \delta^{(2)} q \right] \quad (4.47)$$

Die beiden Termen $\underline{\mathbb{A}}(\underline{m})$ und $\underline{\mathbb{A}}(h)$ können zusammen mit der partiellen Zeitableitung von $u_{sd} = (\langle \delta^{(2)} h \rangle, \langle \delta^{(2)} \underline{m} \rangle)$ und der Bilanzgleichung $\partial u_e / \partial T = \overline{\text{ad}}(\delta H / \delta u_e)^* u_e$ für die Eulersche Strömung zur totalen Zeitableitung der mittleren Zustandsvariablen $\langle u \rangle$ zusammengefasst werden. Die Bewegungsgleichungen der mittleren Strömung sind gewöhnliche Differentialgleichungen für $\langle h \rangle$ und $\langle \underline{v} \rangle$.

Im Gegensatz zu dem ursprünglichen Hamiltonschen System, mit dem Hamiltonfunktional $H_C = H$, sind die beiden Faktoren $\mathcal{F}_\alpha, \mathcal{F}_\beta$ in (4.43) und (4.44) ungleich $\mathcal{F}_\alpha = 1$ und $\mathcal{F}_\beta = 0$. Der erste Term in \mathcal{F}_α und \mathcal{F}_β entspricht dem im vorigen Kapitel hergeleiteten Beitrag des Casimirfunktionals \mathcal{C} zu den Bilanzgleichungen der horizontalen Scherströmung. Die Krümmung $\partial_{\tilde{y}}^2 v_e$ des Geschwindigkeitsfeldes $\underline{v}_e = v_e(\tilde{y})\underline{\tilde{x}}$ legt das Vorzeichen dieses Term's fest. Für ein Flachwasser-System gelten zusätzliche Einschränkungen an die Dynamik des Gleichgewichtszustandes (h_e, \underline{v}_e) . Der Wert des ersten Terms von \mathcal{F}_α und \mathcal{F}_β reduziert sich um einen von der Wassertiefe h_e abhängigen Betrag (2. Term). Die Eulersche Strömung (h_e, \underline{v}_e) ist unter der Bedingung formal stabil, dass beide Faktoren $\mathcal{F}_\alpha - 1, \mathcal{F}_\beta$ für alle Zeiten positiv oder negativ sind und durch $a, A \in \mathbb{R}$ beschränkt werden $0 < a \leq (|\mathcal{F}_\alpha - 1|, |\mathcal{F}_\beta|) \leq A < \infty$ (Arnold 1 & 2). Für ein Flachwasser-System hängt die Stabilität der Eulerschen Strömung auch von der Wassertiefe h_e ab. In den Bereichen, wo h_e groß wird, können die Faktoren $\mathcal{F}_\alpha - 1, \mathcal{F}_\beta$ ihr Vorzeichen ändern. Dann ist es möglich, die Eulersche Strömung (h_e, \underline{v}_e) durch Störungen $(\delta h, \delta \underline{v}) \neq (0, \underline{0})$ zu destabilisieren. Für große Tiefen h_e ist aber auch die Voraussetzung $kh_e \ll 1$, für eine Flachwasser-Behandlung der Hydrodynamik nur noch für langwellige Seegangsmode gegeben. Im Falle einer homogenen Eulerschen Strömung ($\partial_{\tilde{y}} v_e = 0$) werden beide Faktoren \mathcal{F}_α und \mathcal{F}_β singularär. Dann ist es erforderlich $\mathcal{F}_\alpha = 1$ und $\mathcal{F}_\beta = 0$ zu setzen. Die Gleichung (4.43) und (4.50) erhalten dadurch die Gestalt von Gleichung (4.51) und (4.52) für das ursprüngliche Hamiltonsche System mit $H_C = H$ ($h\mathcal{C}(q) = 0$).

Um Gleichung (4.44) in eine Bilanzgleichung für die mittlere Strömung $\underline{v}_e + \langle \delta^{(2)} v \rangle$ umzuformen werden nun die $O(\varepsilon^2)$ -Terme (4.48) der mit $\underline{v} = \underline{v}_e + \delta^{(1)} \underline{v}_e$ multiplizierten Kontinuitätsgleichung (4.43) in die Bilanzgleichung (4.44) eingesetzt.

$$\underline{v}_e \frac{\partial \delta^{(2)} h}{\partial T} = -\underline{v}_e \left(\mathcal{F}_\alpha \delta^{(1)} \underline{v} \cdot \nabla \delta^{(1)} h \right) - \mathcal{F}_\alpha \delta^{(1)} \underline{v} \left(\underline{v}_e \cdot \nabla \delta^{(1)} h \right) - \delta^{(1)} \underline{v} \left(\mathcal{F}_\alpha \delta^{(1)} \underline{v} \cdot \nabla h_e \right) \quad (4.48)$$

Nach Anwenden der Produktregel (4.49) kann der zweite Term auf der rechten Seite von (4.49) gegen den dritten Term auf der rechten Seite von (4.44) gekürzt werden. Die beiden ersten Terme in den Gleichungen (4.48) und (4.49) heben sich ebenfalls weg.

$$\left(\mathcal{F}_\alpha \delta^{(1)} \underline{v} \cdot \nabla \right) \underline{v}_e \delta^{(1)} h = \underline{v}_e \left(\mathcal{F}_\alpha \delta^{(1)} \underline{v} \cdot \nabla \delta^{(1)} h \right) + \delta^{(1)} h \left(\mathcal{F}_\alpha \delta^{(1)} \underline{v} \cdot \nabla \right) \underline{v}_e \quad (4.49)$$

Das Ergebnis der Umformung entspricht Gleichung (4.50), mit $\mathbb{A}(h) = 0$ und $\underline{\mathbb{A}}(\underline{m}) = \underline{0}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \delta^{(2)} \underline{v} \rangle}{\partial T} &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \left(\mathcal{F}_\alpha \delta^{(1)} \underline{v} \cdot \nabla \right) \delta^{(1)} \underline{v} + \left(\delta^{(1)} \underline{v} \cdot \nabla \right) \mathcal{F}_\alpha \delta^{(1)} \underline{v} + \frac{g}{h_e} \nabla \frac{\delta^{(1)} h^2}{2} \right\} d\vartheta - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\delta^{(1)} h}{h_e} \nabla \left[\mathcal{F}_\beta h_e \delta^{(1)} q \right] \right\} d\vartheta \end{aligned} \quad (4.50)$$

Im nächsten Kapitel (4.3) wird der Radiationstress-Tensor S_{ij} für das System von Flachwassergleichungen explizit ausgerechnet. Der Beitrag des Casimirfunktionals \mathcal{C} zu S_{ij} wird dabei nicht berücksichtigt. In diesem Fall ist $\mathcal{F}_\alpha = 1, \mathcal{F}_\beta = 0$ und Gleichung (4.43) und (4.50) vereinfachen sich zu

$$\frac{\partial \langle \delta^{(2)} h \rangle}{\partial T} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \nabla \cdot \left(\delta^{(1)} \underline{v} \delta^{(1)} h \right) d\vartheta = \nabla \cdot \underline{m}_{sd} \quad (4.51)$$

$$\frac{\partial \langle \delta^{(2)} \underline{v} \rangle}{\partial T} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \nabla \cdot \left(\delta^{(1)} \underline{v} \otimes \delta^{(1)} \underline{v} \right) + \frac{g}{h_e} \nabla \left(\delta^{(1)} h^2 / 2 \right) \right\} d\vartheta. \quad (4.52)$$

In der vertikal, über die Dicke der Schicht $s(\zeta_1) \leq z \leq s(\zeta_2)$, und horizontal, über die Fläche \mathcal{D} , integrierten Gleichung (4.52) kann der Radiationstress-Tensors $\underline{\underline{S}}$ (4.53) identifiziert werden.

$$\underline{\underline{S}} = \frac{1}{2\pi V} \int_0^{2\pi} \int_{\mathcal{D}} \int_{s(\zeta_1)}^{s(\zeta_2)} \left\{ \delta^{(1)} \underline{v} \otimes \delta^{(1)} \underline{v} + \underline{\underline{\delta}} \frac{g}{h_e} \frac{\delta^{(1)} h^2}{2} \right\} dz d^2 \underline{x} d\vartheta \quad (4.53)$$

Der Tensor $\underline{\underline{S}}$ setzt sich aus dem Reynoldsstress Tensor $\langle \delta^{(1)} \underline{v} \otimes h_e \delta^{(1)} \underline{v} \rangle$ und dem hydrostatischen Druck-Tensor $\langle g \underline{\underline{\delta}} \delta^{(1)} h^2 / 2 \rangle$ (es ist $\delta^{(1)} p = g \rho^* \underline{\underline{\delta}} \delta^{(1)} h$, mit $\underline{\underline{\delta}} = \delta_{ij}$ in Komponentenschreibweise) zusammen. Solange die Voraussetzung $kh_e \ll 1$ (aus „Die Küste“: $kh_e \leq 0,05$) für eine Flachwasser-Behandlung der Hydrodynamik gegeben ist, wird die Dynamik der Stokesdrift durch die Divergenz des Tensors S_{ij} (4.53) bestimmt.

Die Stokesdrift \underline{m}_{sd} unter Flachwasser-Bedingungen $kh_e \ll 1$

Die vertikal integrierte Stokesdrift $\underline{m}_{sd} = \langle \delta^{(1)} h \delta^{(1)} \underline{v} \rangle$ (4.58) lässt sich aus den Lösungen (4.54), (4.56) der linearisierten Flachwassergleichungen leicht ausrechnen. Die Oberflächenauslenkung $\delta^{(1)} h$ und Wellengeschwindigkeit $(\delta^{(1)} \underline{v}, \delta^{(1)} w)$ ist gleich (Koordinatensystems Σ_2 , (Kapitel 2.1))

$$\delta^{(1)} \underline{v} = \nabla_{\underline{x}} \delta^{(1)} \Phi = \sigma \underline{k} \frac{\cosh kh_e (1 + \zeta)}{\sinh kh_e} \eta(\zeta), \quad (4.54)$$

$$\delta^{(1)} w = \nabla_{\zeta} \delta^{(1)} \Phi = \sigma a^{(1)} \frac{\sinh kh_e (1 + \zeta)}{\sinh kh_e} \sin \vartheta(\zeta) \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} \delta^{(1)} h &= \int_0^{\tilde{t}} \delta^{(1)} w(\tau) d\tau = \sigma a^{(1)} \frac{\sinh kh_e (1 + \zeta)}{\sinh (kh_e)} \int_0^{\tilde{t}} \sin \vartheta(\tau) d\tau \\ &= a^{(1)} \frac{\sinh kh_e (1 + \zeta)}{\sinh (kh_e)} \cos \vartheta(\tilde{t}). \end{aligned} \quad (4.56)$$

In Gleichung (4.54) und (4.55) kennzeichnet $\delta^{(1)} \Phi(\zeta)$ das Geschwindigkeitspotential des Seegangs, $\eta(\zeta) = a^{(1)} \cos \vartheta$ (mit $\vartheta = k_i \tilde{x}_i - \sigma \tilde{t}$) und ζ ist eine skalare Funktion der Wassertiefe ($\zeta = -1$ am Boden und $\zeta = 0$ an der Oberfläche). Die Amplitude der Wellen hängt nun von der Vertikal-Koordinate ζ ab.

$$\delta^{(1)} \Phi(\zeta) = a \sigma \frac{\cosh kh_e (1 + \zeta)}{\sinh kh_e} \sin \vartheta(\zeta) \quad (4.57)$$

Nach dem Einsetzen von (4.54), (4.56) in $\underline{m}_{sd} = \langle \delta^{(1)} h \delta^{(1)} \underline{v} \rangle \equiv \int_{s(\zeta_1)}^{s(\zeta_2)} \langle \delta^{(2)} \underline{v} \rangle d\zeta$ ist das Ergebnis

$$\begin{aligned} \text{gleich} \quad \underline{m}_{sd} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta^{(1)} h(\vartheta) \delta^{(1)} \underline{v}(\vartheta) d\vartheta = \frac{k}{c} \frac{\sigma^2}{c} \mathcal{E} \frac{\sinh 2kh_e (1 + \zeta)|_{\zeta_1}^{\zeta_2}}{\sinh^2(kh_e)} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \vartheta d\vartheta \\ &= \frac{2kE}{c} \frac{\sinh 2kh_e (1 + \zeta)|_{\zeta_1}^{\zeta_2}}{\sinh(2kh_e)}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Für Wasser mit einer Dichte von $\rho_w = 1 \text{ kg/m}^3$ entspricht die Energie pro Flächeneinheit der k -ten Seegangsmode $E = \frac{1}{2} g a^{(1)} (a^{(1)})^*$. In (4.58) wird das Amplitudenquadrat $a^{(1)} (a^{(1)})^*$ mit \mathcal{E} abgekürzt und $\sigma^2 = gk \tanh kh_e$.

4.3 Die dreidimensionale Formulierung des Radiationstress

Für die in den Abschnitten 4.1, 4.2 und 10.5 hergeleiteten Lösungen der nicht-kanonischen Bilanzgleichungen wird in diesem Kapitel der Radiationstress-Tensor explizit ausgerechnet. Dabei sind keine beliebigen Bewegungen des Fluids in $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^3$ zugelassen. Als Einschränkung wird vorausgesetzt, dass die gemittelten Prozesse (Eulersche Strömung plus Stokes Drift) auf einer ortsfesten z -Koordinatenfläche stattfinden. Um die Orbitalbewegung des Seegangs zu beschreiben wird ein Sigma-Koordinatensystem [Mel03] eingeführt. Auf der durch den Seegang gegebenen typischen Längenskala wird der Meeresboden als flach betrachtet $\partial h_B / \partial x_i \approx 0$ und Unebenheiten in der Sigma-Beschreibung nicht berücksichtigt. Der Vorteil dieser Vorgehensweise liegt auf der Hand. Die Vertikal-Integration vereinfacht sich erheblich, da die Phasenmittelung unter das Integral gezogen werden kann. Bei der Berechnung des Radiationstress wird anstelle der bisher favorisierten tensoriellen Schreibweise \underline{S} die Komponentendarstellung S_{ij} verwendet, da auf diese Weise einzelne Tensorelemente ausgezeichnet werden können.

Es ist wichtig zu verstehen, dass wir keine wirkliche dreidimensionale Hydrodynamik betrachten. Verschiedene Studien beginnend mit [Arn65b] und [Dik65b] zeigen, dass im Allgemeinen nicht genügend Casimir-Funktionen vorhanden sind um die generierten coadjungierten Orbits eindeutig zu bestimmen. Damit scheitert natürlich die gesamte Methode. Wir betrachten in der Vertikal-Dimension entkoppelte Systeme, deren Dynamik unabhängig von den physikalischen Gegebenheiten in den sie umgebenden Schichten ist.

Der nächste Schritt besteht in der Einführung einer Transformation des ortsfesten, kartesischen Koordinatensystems $x_i = (x, y)$ und $x_3 = z$ in ein mitbewegtes Sigma-System $\tilde{x}_i = (x, y)$ und $z = s(\tilde{x}_i, \zeta, \tilde{t})$. Die dabei verwendete Nomenklatur orientiert sich an Mellor [Mel03]. Der dreidimensionale Radiationstress-Tensor $S(\underline{X}, T)$ wird durch Vertikal-Integration und Phasenmittelung der transformierten Bewegungsgleichungen hergeleitet. Die resultierenden Gleichungen beschreiben die seegangsabhängige Dynamik der mittleren Strömung. Für eine beliebige physikalische Größe Θ_i , die von der vertikalen Koordinate ζ abhängt, gilt $\Theta_i(\underline{x}, z, t) = \Theta_i(\tilde{\underline{x}}, \zeta, \tilde{t})$, mit $\underline{x} = \tilde{\underline{x}}$ und $t = \tilde{t}$, sowie $\Theta_3(\tilde{\underline{x}}, \zeta(\tilde{\underline{x}}), \tilde{t}) = 0$. Nach implizierter Differentiation ergibt sich für die Horizontal-Ableitung $\nabla_{\underline{x}} \Theta_i = \nabla_{\tilde{\underline{x}}} \Theta_i + \partial \Theta_i / \partial \zeta \nabla_{\underline{x}} \zeta$, für die Vertikal-Ableitung $\nabla_z \Theta_i = \nabla_{\zeta} \Theta_i \nabla_z \zeta$ und für die Zeitableitung $\partial_t \Theta_i = \partial_{\tilde{t}} \Theta_i + \partial \Theta_i / \partial \zeta \partial_t \zeta$. Um die Transformationsgleichungen vollständig zu bestimmen müssen noch die Ableitungen der neuen Vertikal-Koordinate $\zeta(\tilde{\underline{x}})$ definiert werden. Dies geschieht durch implizierter Differentiation der durch ζ festgelegten s -Koordinatenfläche nach x_i , woraus die Bedingung $\nabla_{x_i} s(\tilde{\underline{x}}, \zeta, \tilde{t}) = \nabla_{x_i} z = 0$ resultiert. Dabei ist die tatsächliche Position s der Koordinate ζ bis jetzt noch unbestimmt. Als Ergebnis erhält man $\nabla_{x_i} s + \partial s / \partial \zeta \nabla_{x_i} \zeta = 0$, woraus für den Gradienten und die Zeitableitung von ζ folgt, dass $\nabla_{x_i} \zeta = -s_{x_i} / s_{\zeta}$, $\nabla_z \zeta = 1 / s_{\zeta}$ bzw. $\partial_t \zeta = -s_t / s_{\zeta}$. Dabei wurden folgende Abkürzungen eingeführt $s_{x_i} = \nabla_{x_i} s$, $s_{\zeta} = \partial_{\zeta} s$ und $s_t = \partial_t s$. Bis jetzt ist die gewählte Koordinatenbeschreibung noch allgemein gültig, da die Position der mitbewegten Koordinate nicht näher spezifiziert worden ist. Um die Sigma-Flächen nun in dem starren (x_i, z) -Rahmen einzubetten wird der Ansatz linearer Wellen verwendet $s(\zeta) = \delta^{(1)} h(\zeta)$ (4.56).

$$s = s_0 + \int_0^{\tilde{t}} \delta^{(1)} w(\tau) d\tau = s_0 + a^{(1)} \frac{\sinh kh_e(1 + \zeta)}{\sinh(kh_e)} \cos \vartheta(\tilde{t}) \quad (4.59)$$

Gleichung (4.59) wurde unter Verwendung der neuen Vertikalbeschreibung in Sigma-Koordinaten formuliert. Die mitbewegte Koordinate ζ nimmt Werte zwischen -1 am Boden und Null an der Oberfläche ($-1 \geq \zeta \geq 0$) an. Die starren z -Koordinatenflächen bilden sich im mitbewegten System auf $s_0 = h_e(1 + \zeta) - D$ ab. Mit $h_e(\underline{x}, T)$ ist die lokale Tiefe als Summe aus mittlerem Wasserstand $\hat{\eta}(\underline{x}, T)$ und topographischer Tiefe $D(\underline{x}, T)$ gegeben. Die typische Zeitskala, auf der sich die mittleren

Seegangsgößen ändern, entspricht T . In Gleichung (4.59) wurde der übliche lineare Wellenansatz für die Vertikalgeschwindigkeit $\delta^{(1)}w = \nabla_z \delta^{(1)}\Phi(\zeta)$ (4.65) des Seegangs in Abhängigkeit von der Phasenfunktion $\vartheta = \underline{k} \cdot \underline{\tilde{x}} - \sigma \tilde{t}$ eingesetzt⁶.

Die Bilanzgleichungen der mittleren Strömung (4.1) setzen sich additiv aus der phasengemittelten Gleichung (4.60, links) für die Stokesdrift \underline{u}_{sd} ($n = 2$) und $\partial u_e / \partial t = -\overline{\text{ad}}(\delta H / \delta u_e)^* u_e$ für die Eulersche Strömung zusammen. Durch Anwenden der Beziehungen $\partial s_\zeta / \partial x_i = \partial s_{x_i} / \partial \zeta$ und $\partial s_\zeta / \partial t = \partial s_t / \partial \zeta$ sowie durch elementare Umformungen der Art $(\nabla_{x_i}(\cdot))_i s_\zeta = \nabla_{x_i}((\cdot)_i s_\zeta) - (\partial s_{x_i} / \partial \zeta)(\cdot)_i$ erhält Gleichung (4.60, links) die folgende Gestalt (4.60, rechts).

$$\begin{aligned}
(1.) \quad & s_\zeta \frac{\partial \mathbb{S}_{i3}}{\partial z} = \frac{\partial \mathbb{S}_{i3}}{\partial \zeta} \\
(2.) \quad & s_\zeta \frac{\partial \mathbb{S}_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial \mathbb{S}_{ij} s_\zeta}{\partial \tilde{x}_i} - \frac{\partial \mathbb{S}_{ij} s_{x_i}}{\partial \zeta} \\
(3.) \quad & s_\zeta \frac{\partial \delta^{(2)} u_i}{\partial t} = \frac{\partial \delta^{(2)} \tilde{u}_i s_\zeta}{\partial \tilde{t}} - \frac{\partial \delta^{(2)} \tilde{u}_i s_t}{\partial \zeta} \\
(4.) \quad & s_\zeta \frac{\partial u_j \delta^{(2)} u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \tilde{u}_j \delta^{(2)} \tilde{u}_i s_\zeta}{\partial \tilde{x}_i} - \frac{\partial \tilde{u}_j \delta^{(2)} \tilde{u}_i s_{x_j}}{\partial \zeta} \\
(1.) \text{ bis } (4.) \quad & \frac{d \delta^{(2)} u_i}{dt} = -\frac{\partial \mathbb{S}_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial \mathbb{S}_{i3}}{\partial z} \longrightarrow \frac{d \delta^{(2)} \tilde{u}_i s_\zeta}{d\tilde{t}} = -\frac{\partial \mathbb{S}_{ij} s_\zeta}{\partial \tilde{x}_i} - \frac{\partial \tilde{\mathbb{S}}_{i3}}{\partial \zeta} \quad (4.60)
\end{aligned}$$

Die totale Zeitableitung $d\delta^{(2)}u_i/dt$ in (4.60) ist gleich (3.) plus (4.). Gleichung (4.60, rechts) wurde in Sigma-Koordinaten $(\tilde{x}_i, \zeta, \tilde{t})$ formuliert. Sie beschreibt den Beitrag einer Spektralkomponente des Seegangs zur Massen- und Impulsdichte der mittleren Strömung. Um den Gesamtbeitrag zu berechnen muss die phasengemittelte Gleichung noch vertikal, über die Dicke der Schicht $s(\zeta_1) \leq z \leq s(\zeta_2)$, und horizontal, über die Fläche des Gebietes \mathcal{D} , integriert werden. Dann enthält die rechte Seite der Gleichung die Divergenz des Radiationstress-Tensor $\tilde{\mathbb{S}}_{ij}$ (4.61) als generalisierte Kraft. Durch die gewählte Sigma-Beschreibung der Vertikal-Koordinate ist es möglich, Integration und Phasenmitteilung von Gleichung (4.60 rechts) zu vertauschen. Der in (4.60) definierte Operator $\tilde{\mathbb{S}}_{i3}$ ist gleich

$$\tilde{\mathbb{S}}_{i3} := \mathbb{S}_{ij} s_{x_i} - \left[\delta^{(2)} \tilde{u}_i s_t + \tilde{u}_j \delta^{(2)} \tilde{u}_i s_{x_j} \right] - \mathbb{S}_{i3} \quad , \quad \tilde{\mathbb{S}}_{ij} = \frac{1}{2\pi V} \int_{\mathcal{D}} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \int_0^{2\pi} \mathbb{S}_{ij} d\vartheta d\zeta d^2 \underline{x} \quad . \quad (4.61)$$

Der in eckigen Klammern zusammengefasste Term ist von ($n \geq 3$)-ter Ordnung und wird im Folgenden durch den entsprechenden $O(\varepsilon^2)$ -Term der linearisierten Gleichung $[\delta^{(1)} \tilde{u}_i s_t + (\tilde{u}_e)_j \delta^{(1)} \tilde{u}_i s_{x_j}]$ ersetzt.

Die Transformation der Bewegungsgleichungen in ein mit der Wellenbewegung mitbewegtes Koordinatensystem führt zu einer Zerlegung des seegangsinduzierten Antriebs in eine horizontale und vertikale Komponente, $\tilde{\mathbb{S}}_{ij} s_\zeta$ und $\tilde{\mathbb{S}}_{i3}$. Die Bezeichnungen Horizontal und Vertikal beziehen sich auf die (\tilde{x}, \tilde{y}) -Ebene des σ -Koordinatensystems. Die Divergenz des Radiationstress-Tensors beeinflusst ausschließlich den horizontalen Transport der dynamischen Variablen (Masse, Impuls,...). Das Ergebnis für die vertikale Komponente $\tilde{\mathbb{S}}_{ij}$ wird in dem gekoppelten Modell für Seegang und Strömung nicht betrachtet. Nach Integration über V , dem Volumen der Wassersäule $\zeta_1 \geq \zeta \geq \zeta_2$, und Mittelung über die Phasenfunktion $\vartheta(\zeta)$ erhält man aus (4.60) eine Bilanzgleichung für die mittlere Strömung.

⁶Für $\varepsilon = 1$ entspricht der *WKB*-Ansatz (3.12) dem Ansatz linearer Wellen.

Für die Auswertung von Gleichung (4.60) werden die Ableitungen der Funktion s benötigt.

$$s_\zeta = h_e + kh_e a^{(1)} \frac{\cosh kh_e(1 + \zeta)}{\sinh(kh_e)} \cos \vartheta(\tilde{\underline{x}}, \tilde{t}) \quad (4.62)$$

$$s_{x_i} = -ka^{(1)} \frac{\cosh kh_e(1 + \zeta)}{\sinh(kh_e)} \sin \vartheta(\tilde{\underline{x}}, \tilde{t}) \quad (4.63)$$

$$s_t = \sigma a^{(1)} \frac{\sinh kh_e(1 + \zeta)}{\sinh(kh_e)} \sin \vartheta(\tilde{\underline{x}}, \tilde{t}) \quad (4.64)$$

Im Folgenden wird nicht mehr zwischen den Horizontal- und Zeitkoordinaten des z - und σ -Koordinatensystems unterschieden $t = \tilde{t}$, $x_i = \tilde{x}_i$ und $\tilde{u}_i = u_i$. Auch auf eine differenzierte Bezeichnung des Radiationstress-Tensors in z - und σ -Koordinaten wird verzichtet $S_{ij} = \tilde{S}_{ij}$, $\mathcal{S}_{ij} = \tilde{\mathcal{S}}_{ij}$.

4.3.1 Die Einzelkomponenten des Radiationstress-Tensors

1. Der Reynolds-Stress Tensor

Der Beitrag des Reynolds-Stress $\delta^{(1)}v_i\delta^{(1)}v_j$ zum Radiationstress-Tensor \mathcal{S}_{ij} lässt sich nach Einsetzen der linearen Wellenlösung (4.65) in die Bilanzgleichung (4.60) berechnen.

$$\delta^{(1)}v_i = \nabla_{x_i} \delta^{(1)}\Phi = \frac{a^{(1)}\sigma \cosh kh_e(1 + \zeta)}{|\underline{k}| \sinh kh_e} \nabla_{x_i} \sin(k_i x_i - \sigma t) = \sigma \frac{k_i}{|\underline{k}|} \frac{\cosh kh_e(1 + \zeta)}{\sinh kh_e} \eta(\zeta) \quad (4.65)$$

Das letztendliche Resultat ist gleich

$$\delta^{(1)}v_i \delta^{(1)}v_j = g |\underline{k}| \frac{k_i k_j}{|\underline{k}|^2} \frac{c_g}{c} \frac{4 \cosh^2 kh_e(1 + \zeta)}{2kh_e + \sinh(2kh_e)} \eta(\zeta)^2. \quad (4.66)$$

In dieser Gleichung (4.66) kennzeichnet $c_g = \partial\sigma/\partial|\underline{k}|$ die Gruppengeschwindigkeit und $c = \sigma/|\underline{k}|$ die Phasengeschwindigkeit linearer Wellen $\eta(\zeta) = a^{(1)} \cos(k_i \tilde{x}_i - \sigma t)$. Die intrinsische Frequenz σ ist durch $\sigma^2 = g |\underline{k}| \tanh(kh_e)$ gegeben und der Quotienten c_g/c ist gleich $c_g/c = (\sinh(2kh_e) + 2kh_e)/2\sinh(2kh_e)$.

2. Die Variation des Drucks aufgrund von Seegang

Eine jede Störung $\delta^{(1)}\underline{u}$ des barotropen Gleichgewichtszustandes \underline{u}_e produziert eine Störung des Druckfeldes $\delta^{(1)}p$. Durch die Bernoulli Gleichung in ihrer linearisierten Form (4.67) ist $\delta^{(1)}p$ gegeben.

$$\frac{\partial \delta^{(1)}\Phi(\zeta)}{\partial t} + \frac{\delta^{(1)}p(\zeta)}{\rho} + g\delta^{(1)}h = 0 \quad , \quad \delta^{(1)}h = s - s_0 \quad (4.67)$$

Bei der Herleitung dieser Gleichung⁷ wurde das Geschwindigkeitspotential $\delta^{(1)}\Phi(\zeta)$ (4.57) verwendet und die Dichte ρ konstant gesetzt.

$$\frac{\partial \delta^{(1)}\Phi}{\partial t} = \frac{a^{(1)}\sigma \cosh kh_e(1 + \zeta)}{|\underline{k}| \sinh kh_e} \frac{\partial}{\partial t} \sin(k_i X_i - \sigma t) = -\frac{\sigma^2 \cosh kh_e(1 + \zeta)}{|\underline{k}| \sinh kh_e} \eta(\zeta) \quad (4.68)$$

⁷Für eine nicht stationäre und wirbelfreie Strömung ist die Bernoulli Gleichung gleich $\frac{\partial \Phi}{\partial T} + \frac{|\underline{u}|^2}{2} + \int \frac{1}{\rho} dp + gz = F(T)$ [Pij90].

Für ein lineares Wellenfeld (4.65) ist $\delta^{(1)}p$ gleich

$$\frac{\delta^{(1)}p}{\rho} = \frac{\partial \delta^{(1)}\Phi}{\partial t} - g(s - s_0) = \left(c^2 |\underline{k}| \frac{\cosh kh_e(1 + \zeta)}{\sinh kh_e} - g \frac{\sinh kh_e(1 + \zeta)}{\sinh kh_e} \right) \eta(\zeta). \quad (4.69)$$

Die seegangsbedingte Variation des Drucks unter Flachwasser-Bedingungen

In flachen Gewässern, wo die Wellenlänge λ sehr viel größer als die Wassertiefe ist $h_e/\lambda \ll 1$ kann die Störung des Druckfeldes $\delta^{(1)}p$ durch den hydrostatischen Druck $\rho^*g\delta^{(1)}h$ ersetzt werden.

$$\delta_{ij} g \frac{\delta^{(1)}h^2}{2h_e} = \delta_{ij} \left[\frac{g}{2} (a^{(1)})^2 \right] \frac{\sinh^2 kh_e(1 + \zeta)}{h_e \sinh^2(kh_e)} \cos^2 \vartheta(t) \quad (4.70)$$

4.3.2 Der Radiationstress für ein inkompressibles Fluid.

Für das in Kapitel 4.1 und 10.5 behandelte Beispiel eines inkompressiblen Fluids, dessen phasengemittelte Bewegung auf einer Äquipotentialfläche des Gravitationsfeldes stattfindet, ist der hergeleitete Radiationstress-Tensor gleich

$$\mathcal{S}_{ij} = \frac{1}{2\pi V} \int_{\mathcal{D}} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \int_0^{2\pi} \left(\delta^{(1)}v_i \delta^{(1)}v_j + \delta_{ij} \delta^{(1)}p \right) d\vartheta d\zeta d^2\underline{x}. \quad (4.71)$$

Werden die Zwischenergebnisse (4.66), (4.69) in die horizontale Impulsbilanzgleichung der mittleren Strömung (4.60) ($\underline{u} = \underline{v}_e + \delta^{(1)}\underline{v}$) eingesetzt und das Resultat über die Phase ϑ gemittelt und vertikal integriert, dann erhält man das folgende Gleichungssystem als Ergebnis.

$$\begin{aligned} \frac{d \langle \delta^{(2)}u_i s_\zeta \rangle}{dT} &= - \frac{\partial \mathcal{S}_{ij} s_\zeta}{\partial X_j} - \frac{\partial \mathfrak{S}_{i3}}{\partial \zeta} \\ \text{mit } \mathcal{S}_{ij} s_\zeta &= \frac{1}{2\pi V} \int_{\mathcal{D}} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \int_0^{2\pi} \left[s_\zeta \delta^{(1)}v_i \delta^{(1)}v_j + s_\zeta \delta^{(1)}p \delta_{ij} \right] d\vartheta d\zeta d^2\underline{x} \quad (i, j = 1, 2) \\ \mathfrak{S}_{i3} &= \frac{1}{2\pi V} \int_{\mathcal{D}} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \int_0^{2\pi} \left\{ \delta^{(1)}v_i \underbrace{\left[s_{x_i} \delta^{(1)}v_j - s_t - \delta^{(1)}w \right]}_{=: \delta^{(1)}\underline{\omega}} - u_{e_j} \delta^{(1)}v_j s_{x_j} + s_{x_i} \delta_{i3} \delta^{(1)}p \right\} d\vartheta d\zeta d^2\underline{x} \end{aligned}$$

Bei der Berechnung von \mathfrak{S}_{i3} wurde $S_{i3} = \delta^{(1)}v_i \delta^{(1)}w$, und $S_{ij} = \delta^{(1)}v_i \delta^{(1)}v_j$ in Gleichung (4.61) eingesetzt. Die in \mathfrak{S}_{i3} zusammengefassten Terme enthalten Produkte der Winkelfunktionen $\sin \vartheta$ und $\cos \vartheta$. Daher verschwinden diese Terme nach Mittelung über die Phase ϑ der Wellen ($\sin \vartheta \cos \vartheta = \sin 2\vartheta$). Der Radiationstress-Tensors in der horizontalen Impulsbilanzgleichung (4.60) der mittleren Strömung ist gleich (4.73).

$$S_{ij} s_\zeta = h_e k E \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{c_g}{c} \frac{4 \cosh^2 kh_e(1 + \zeta)}{2kh_e + \sinh(2kh_e)} \left(\frac{k_i k_j}{k^2} + \delta_{ij} \left[1 - \frac{\tanh kh_e(1 + \zeta)}{\tanh(kh_e)} \right] \right) d\zeta \quad (4.72)$$

$$= E(\underline{X}, \zeta, \underline{k}, T) \left(\frac{c_g}{c} \left[\frac{k_i k_j}{k^2} + \delta_{ij} \right] F_1 - \delta_{ij} F_2 \right) \quad (4.73)$$

In dieser Gleichung kennzeichnet $E(\underline{X}, \zeta, \underline{k}, T)$ die vertikal integrierte und phasengemittelte Energie $E = \frac{1}{2}g(a^{(1)})^2$. Um das Ergebnis in kompakter Form niederschreiben zu können wurden folgende Abkürzungen eingeführt

$$F_1 = \frac{\sinh 2kh_e(1 + \zeta)|\zeta_1^2 + 2kh_e(1 + \zeta)|\zeta_1^2}{\sinh(2kh_e) + 2kh_e}, \quad F_2 = \frac{\cosh 2kh_e(1 + \zeta)|\zeta_1^2}{4\sinh^2(kh_e)}, \quad (4.74)$$

mit $(\cdot)|_{\zeta_1}^{\zeta_2} = (\cdot)(\zeta_2) - (\cdot)(\zeta_1)$. Die Formulierung der Kontinuitätsgleichung (Seegang) unter Verwendung von σ -Koordinaten ist gleich

$$0 = \frac{\partial \delta^{(1)}v_i}{\partial x_i} - \frac{\partial \delta^{(1)}v_i}{\partial \zeta} \frac{s_{x_i}}{s_\zeta} + \frac{\partial \delta^{(1)}w}{\partial \zeta} \frac{1}{s_\zeta} = \frac{1}{s_\zeta} \left(\frac{\partial (s_\zeta \delta^{(1)}v_i)}{\partial x_i} - \frac{\partial \delta^{(1)\omega}}{\partial \zeta} + \frac{\partial s_\zeta}{\partial t} \right). \quad (4.75)$$

Bei der Herleitung von Gleichung (4.75) wurden die Beziehungen $\partial s_\zeta / \partial x_i = \partial s_{x_i} / \partial \zeta$ bzw. $\partial s_t / \partial \zeta = \partial s_\zeta / \partial t$ und die Definition von $\delta^{(1)\omega} = s_{x_i} \delta^{(1)}v_j - s_t - \delta^{(1)}w$ verwendet. Da sowohl $\langle s_\zeta \rangle$ als auch $\langle \delta^{(1)\omega} \rangle$ gleich Null sind, bleibt nach Mittelung über die Phase ϑ nur der erste Term auf der rechten Seite von Gleichung (4.75) bestehen.

Trägt man alle Ergebnisse zusammen, so erhält man einen Satz von Gleichungen, der mit den Resultaten früherer Arbeiten (Longuet-Higgins & Stewart, 1962 [LoS62] & 1964 [LoS64]; Phillips, 1969 [Phi69]; Rosenthal & Dolata, 1984 [Ros84]; Melor, 2003 [Mel03]) vergleichbar ist.

$$\frac{d(h_e v_{ei})}{dT} + \frac{d(h_e v_{sd_i})}{dT} = -\frac{\partial (h_e p_e)}{\partial X_i} - \frac{\partial (S_{ij} s_\zeta)}{\partial X_j} \quad \text{und} \quad \frac{\partial (h_e v_{ei})}{\partial X_i} + \frac{\partial \langle s_\zeta \delta^{(1)}v_i \rangle}{\partial X_i} = 0 \quad (4.76)$$

Das gekoppelte Modell für Seegang und Strömung (Kapitel 6) verwendet die Formulierung (4.76a) und (4.76b) der horizontalen Impulsbilanz- und Kontinuitätsgleichung. Die Stokesdrift ist gleich $h_e v_{sd_i} \equiv \langle s_\zeta \delta^{(1)}v_i \rangle$. Nach Integration über die Wassersäule von $\zeta = -1$ am Boden bis $\zeta = 0$ an der mitbewegten Oberfläche ist der Radiationstress-Tensor S_{ij} gleich

$$S_{ij} s_\zeta = E \frac{c_g}{c} \frac{k_i k_j}{k^2} + \delta_{ij} E \left(\frac{c_g}{c} - \frac{1}{2} \right). \quad (4.77)$$

Diese Gleichung entspricht dem Ergebnis von Phillips (1977, [Phl77], pp 336).

In diesem Abschnitt wurde der Radiationstress-Tensor für eine Schar übereinander liegender Ebenen ($X, Y, Z = \text{konst.}$) des \mathbb{R}^3 berechnet. Das Ergebnis ist nur unter der Voraussetzung gültig, dass die mittlere Hydrodynamik auf einer Äquipotentialebene des Gravitationsfeldes stattfindet und von dem Eulerschen Strömungszustand auf den anderen Ebenen nicht abhängt. Dann kontrolliert⁸ der Tensor $\int \langle S_{ij1} \rangle d^3 \underline{X}$ (4.22) die zeitliche Entwicklung der mittleren Strömung in der betrachteten Ebene. Der Beitrag des Tensors $\int \langle S_{ij2} \rangle d^3 \underline{X}$ (4.23) wird im gekoppelten Modell für Seegang und Strömung nicht berücksichtigt (Kapitel 4.1). Deshalb hängt die seegangsinduzierte Strömung nur noch von den mittleren Seegangsgrößen ab und nicht mehr von der Struktur des Eulerschen Strömungsfeldes in der ($X, Y, Z = \text{konst.}$) Ebene.

⁸Der Einfluss von Dissipation und meteorologischem Input von Energie und Impuls wird hier nicht betrachtet. Siehe dazu Kapitel 8

4.3.3 Der Radiationstress für ein Fluid unter Flachwasserbedingungen.

In Kapitel 4.2 wurde der Spezialfall eines homogenes, flaches Gewässers behandelt (4.26), (4.27). Die Beschreibung der Bewegung erfolgt in einem Koordinatensystem $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, das mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $f/2$ um die Vertikal-Achse \hat{z} herum rotiert. Der hergeleitete Radiationstress-Tensor setzt sich aus dem Reynolds-Stress Tensor $\langle \delta^{(1)} v_i \delta^{(1)} v_j \rangle$ und dem Beitrag seegangsbedingter Druckfluktuationen $\langle \delta_{ij} (g \delta^{(1)} h^2) / 2h_e \rangle$ zusammen.

$$S_{ij} s_\zeta = \frac{1}{2\pi V} \int_{\mathcal{D}} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \int_0^{2\pi} \left(\delta^{(1)} v_i \delta^{(1)} v_j s_\zeta + \delta_{ij} \frac{g}{2h_e} \delta^{(1)} h^2 s_\zeta \right) d\vartheta d\zeta d^2 \underline{x}. \quad (4.78)$$

Werden die Ergebnisse (4.66) und (4.70) in den Ausdruck (4.78) für den dreidimensionalen Radiationstress-Tensor unter Flachwasser-Bedingungen eingesetzt, so erhält man nach Ausführen der Integration und Phasenmittelung das folgende Resultat

$$\begin{aligned} S_{ij} s_\zeta &= h_e k \mathcal{E} \frac{c_g}{c} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \left(\frac{4 \cosh^2 kh_e (1 + \zeta)}{2kh_e + \sinh(2kh_e)} \frac{k_i k_j}{k^2} + \frac{4 \sinh^2 kh_e (1 + \zeta)}{2kh_e + \sinh(2kh_e)} \frac{g \delta_{ij}}{2h_e \sigma^2} \right) d\zeta \\ &= \mathcal{E} \frac{c_g}{c} \frac{\alpha \sinh 2kh_e (1 + \zeta)|_{\zeta_1}^{\zeta_2} + \beta 2kh_e (1 + \zeta)|_{\zeta_1}^{\zeta_2}}{2kh_e + \sinh(2kh_e)}. \end{aligned} \quad (4.79)$$

Die beiden skalaren Faktoren α und β in (4.79) sind gleich

$$\alpha := \left[\frac{k_i k_j}{k^2} + \frac{g \delta_{ij}}{2h_e \sigma^2} \right] \quad \text{und} \quad \beta := \left[\frac{k_i k_j}{k^2} - \frac{g \delta_{ij}}{2h_e \sigma^2} \right]. \quad (4.80)$$

Die in σ -Koordinaten transformierte Kontinuitätsgleichung (4.51) kann in gleicher Weise wie (4.75) hergeleitet werden.

$$\frac{\partial \delta^{(1)} h s_\zeta}{\partial t} + \frac{\partial \delta^{(1)} h \delta^{(1)} v_i s_\zeta}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\left[\delta^{(1)} \overset{\circ}{\omega} + 2 s_t \right] \delta^{(1)} h \right) = 0 \quad (4.81)$$

Die beiden Terme⁹ $\delta^{(1)} \overset{\circ}{\omega} \delta^{(1)} h$ und $s_t \delta^{(1)} h$ enthalten Produkte der Winkelfunktionen $\sin \vartheta$ und $\cos \vartheta$, die nach Phasenmittelung verschwinden. Aus dem gleichen Grund können auch die phasengemittelten Komponenten des Tensors \mathfrak{S}_{ij} gleich Null gesetzt werden. Die Bilanzgleichungen des mittleren Wasserstandes $\langle h \rangle$ und der mittleren Strömung $h_e \langle v_i \rangle = \langle h_e v_i \rangle = h_e [v_{ei} + v_{sdi}]$ sind deshalb gleich (4.83) und (4.84).

$$\frac{\partial h_e^2}{\partial T} + \frac{\partial h_e^2 v_{ei}}{\partial X_i} + \frac{\partial \langle \delta^{(1)} h s_\zeta \rangle}{\partial T} + \frac{\partial \langle \delta^{(1)} h \delta^{(1)} v_i s_\zeta \rangle}{\partial X_i} = 0 \quad (4.83)$$

$$\frac{\partial \langle h_e v_i \rangle}{\partial T} + \frac{\partial \langle h_e v_i v_j \rangle}{\partial X_j} + \frac{\partial g h_e^2}{\partial X_i} + h_e \varepsilon_{ijk} f_j v_{ek} = - \frac{\partial S_{ij} s_\zeta}{\partial X_j} \quad (4.84)$$

⁹ *Anmerkung:* In Kapitel 4.2 wurde der Radiationstress-Tensor (4.78) aus den $O(\varepsilon^2)$ -Bilanzgleichungen für (h, m_i) durch Transformation der Variablen $(h, m_i) \mapsto (h, v_i)$ hergeleitet. Der so berechnete Tensor S_{ij} unterscheidet sich von dem Resultat (4.82) der Störungsrechnung für den Variablensatz (h, v_i) in einem wesentlichen Punkt. Im ersten Fall ist der Beitrag seegangsbedingter Druckfluktuationen zu S_{ij} gleich $\delta p_1 \sim \delta^{(1)} h^2$ (4.78) und im zweiten Fall gleich $\delta p_2 \sim \delta^{(1)} h s_\zeta$ (4.82). Das Verhältnis beider Terme entspricht $\delta p_1 / \delta p_2 = (kh_e)^{-1} \tanh kh_e (1 + \zeta)$.

$$S_{ij} s_\zeta = \frac{1}{2\pi V} \int_{\mathcal{D}} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \int_0^{2\pi} \left(\delta^{(1)} v_i \delta^{(1)} v_j s_\zeta + \delta_{ij} g \delta^{(1)} h s_\zeta \right) d\vartheta d\zeta d^2 \underline{x}. \quad (4.82)$$

Unter der Voraussetzung von Hydrostatik ($\partial \delta^{(1)} \Phi / \partial t = 0$) (in (4.69)) entspricht der hergeleitete Radiationstress-Tensor (4.82) dem Tensor (4.71) für ein inkompressibles Fluid.

Kapitel 5

Die Kanonische Seegangstheorie - Hamilton-Jacobi Theorie

Für eine große Anzahl von physikalischen Problemen ist die Integrierbarkeit der dynamischen Gleichungen nicht gewährleistet oder kann in einfacher Weise nicht etabliert werden. Selbst wenn das Hamiltonfunktional $H(q^i, p_i)$ explizit zeitunabhängig ist, müssen die hamiltonschen Gleichungen keinen vollständigen Satz von Impuls-Invarianten p_i generieren. Die Lagrangefunktion L kann singulär sein und die kanonischen Impulsvariablen $p_i = \partial L / \partial \dot{q}^i$ daher unbestimmt. Neben den generalisierten Koordinaten q^i und Impulsen p_i kann das zeitunabhängige Hamiltonfunktional $H(q^i, p_i)$ noch von Parametern wie z.B. der Pendellänge, Materialkonstanten (Federkonstanten, Gravitationskonstante) oder elektrischen und magnetischen Feldstärken abhängen, die eine Funktion der Zeit sind. Durch Variation der Parameter wird Arbeit am System verrichtet. Die Energie ist deshalb keine Erhaltungsgröße mehr. Die Hamilton-Jacobi (HJ) Theorie wurde zu dem Zweck entwickelt, Lösungen der Ausgangsgleichungen in geschlossener Form durch Transformation der kanonischen Koordinaten auf einen geeigneteren Satz kanonischer Koordinaten und anschließender Integration der Gleichungen zu finden. Offensichtlich lässt sich das Problem leichter integrieren, wenn die neuen Koordinaten Q^i zyklisch sind, das Hamiltonfunktional also nicht von ihnen abhängt. Es ist einfach zu überprüfen, dass die dazugehörigen Impulsvariablen P_i Konstanten der Bewegung sind. Wenn alle Koordinaten zyklisch sind, dann sind auch alle Impulse invariant und das Hamiltonfunktional $K(Q^i, P_i)$ ist eine Konstante der Bewegung. In diesem Fall wird die Zeitableitung der Koordinate Q^i zu einer Konstanten, da sie der Ableitung des Hamiltonfunktionals nach der Impulsvariablen entspricht (2.3). Die Bewegung der Teilchen (Q^i, P_i) ist linear in der Zeit. Ein kompletter Satz von Impulsinvarianten definiert eine glatte Oberfläche (Mannigfaltigkeit) im Phasenraum, auf welcher sich die Dynamik entwickelt (Noether Theorem). Unter der Voraussetzung, dass diese Oberflächen kompakt und einfach zusammenhängend sein sollen, nehmen die Mannigfaltigkeiten \mathcal{M} die Gestalt von n -Tori an, auf denen Winkel-Wirkungsvariablen definiert werden können.

Das Konzept der Hamilton-Jacobi Theorie beruht auf der folgenden Idee: kanonische Koordinatentransformationen erhalten die kanonische Struktur der dynamischen Gleichungen und die Form der Hamiltonfunktion H . Die kanonischen Ausgangsgleichungen sind integrierbar, wenn eine kanonische Transformation von H nach K , der neuen Hamiltonfunktion, gefunden werden kann, so dass die transformierten kanonischen Gleichungen integriert werden können. Das Problem derartige kanonische Transformationen zu konstruieren reduziert sich zu der Aufgabe, Lösungen der Hamilton-Jacobi Gleichung zu finden. Das ist eine Bedingungsgleichung für die Erzeugende S der Transformation, auch Prinzipalfunktion genannt. Wie sich herausstellt, geht das Problem, S zu bestimmen, in das Problem

über, die Hamilton-Jacobi (HJ) Gleichung zu separieren. In diesem Kapitel wird die Integrabilität des Hamiltonschen Systems und damit die Separabilität der HJ-Gleichung vorausgesetzt.

Für die Herleitung der HJ-Gleichung werden zeitabhängige kanonische Transformationen der Hamiltonschen Gleichungen betrachtet. Transformationen dieser Art werden durch Erzeugende vom Typ1 $S = S(q, Q, t)$ und Typ2 $S = S(q, P, t)$ generiert. Durch Verwenden der Erzeugenden $S(q, Q, t)$ erhält die Transformationsgleichung von H die folgende Gestalt $K = H(q, p(q, Q, t), t) + \partial_t S$. Die neue Hamiltonfunktion K hängt nicht von den Ableitungen der Erzeugenden S nach q^i und Q^i ab, da beide Funktionen $H(q^i, p_i)$ und $K(Q^i, P_i)$ die Hamiltonschen Gleichungen erfüllen müssen. Nach Voraussetzung sind die neuen Koordinaten zyklisch und K ist konstant. Es ist dann immer möglich, eine solche Konstante gleich Null zu setzen $K(Q^i, P_i) = 0$. Unter der Voraussetzung, dass (Q, q) unabhängige Koordinaten sind ($\det(\partial Q/\partial q) = 0$) können die partiellen Ableitungen von $S(q, Q, t)$ gebildet werden:

$$p_i = \partial_{q^i} S, \quad P_\alpha = \partial_{Q^\alpha} S. \tag{5.1}$$

Nach dem Einsetzen von $p_i = \partial_{q^i} S$ in die Transformationsgleichung für $K = 0$ erhält man eine partielle Differentialgleichung (5.2) für die Erzeugende S , die Hamilton-Jacobi Gleichung.

$$0 = K = H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q^i}, t\right) + \frac{\partial S(q, Q, t)}{\partial t} \tag{5.2}$$

Die beiden Gleichungen (5.1) und (5.2) bilden den Satz kanonischer Transformationsgleichungen. Die physikalische Bedeutung der Funktion S folgt aus der totalen Zeitableitung von $S(q, Q, t)$.

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial S}{\partial Q^\alpha} \dot{Q}^\alpha \tag{5.3}$$

Die partielle Ableitung von S nach q^i wird durch p_i festgelegt ($p_i = \partial_{q^i} S$) und H ist gleich $H = -\partial_t S$. Wenn Q konstant ist ($\dot{Q}^\alpha = 0$), dann ist Gleichung (5.3) zu Beziehung (5.4) äquivalent.

$$\frac{dS}{dt} = p_i \dot{q}^i - H = L, \quad S = \int L dt \tag{5.4}$$

Die Erzeugende der kanonischen Transformation entspricht dem Wirkungsfunktional S .

5.1 Kanonische Störungstheorie

In diesem Kapitel wird kanonische Störungstheorie dazu verwendet, Lösungen für die nichtlinearen Anteile der Störungsentwicklung (Kapitel 3) herzuleiten. Unter der Voraussetzung, dass die Hamiltonfunktion $H(u, \epsilon, t)$ in einen integralen Part H_0 , welcher die Dynamik linearer Lösungen bestimmt und einen nicht-integralen Part H_1 , der verglichen mit H_0 klein ist ($\epsilon \ll 1$), zerlegt werden kann, ist es gestattet, $H(u, \epsilon, t)$ in eine Störungsreihe zu entwickeln.

$$H(u, \epsilon, t) = H_0(\varsigma, t) + \epsilon H_1(u, t) = H_0(u, t) + \epsilon H^{(1)}(u, t) + \epsilon^2 H^{(2)}(u, t) + \dots \tag{5.5}$$

Für den hier betrachteten Fall rotationsfreier Gravitationswellen in einem idealen, homogenen Fluid ist der dynamische Vektor $u = (\psi, \eta)^T$ durch den Wert des Geschwindigkeitspotentials $\psi(\underline{x}, t)$ und die Position $z = \eta(\underline{x}, t)$ der freien Oberfläche gegeben. Eine Fourier-Entwicklung der kanonischen Variablen $\psi = p_k \varpi_k^*$ und $\eta = q^k \varpi_k$ (über k wird summiert) führt zu einer Zerlegung des Funktionals H , die nur noch von den generalisierten Koordinaten q^k und Impulsen p_k abhängt¹ [Mil75],

¹Die Hamiltonfunktion $H = \frac{1}{2} \int_{-h}^{\eta} (\nabla \psi)^2 dz + \frac{1}{2} g \eta^2 = \frac{1}{2} (k^2 p_k p_{-k} + g q^k q^{-k})$ entspricht der kanonischen Hamiltonfunktion (5.6) nach Variablentransformation $\check{q}^k = \sqrt{g} q^k$ und $\check{p}_k = k p_k$

[Mil76]. Später werden die kanonischen Winkel-Wirkungsvariablen (ϑ^k, I_k) mit u_k bezeichnet. An jedem Punkt des Koordinaten-Raums erfüllen die Funktionen $\{\varpi^k\}$ die Orthogonalitätsbedingung $\langle \varpi_k, \varpi_l^* \rangle = \delta_{kl}$. Der integrierbare Teil der kanonischen Hamiltonschen Gleichungen $H = H_0$ besitzt einen vollständigen Satz von Eigenfunktionen ϖ . Deshalb können die kanonischen Variablen $\zeta = (q^i, p_i)$ in Winkel-Wirkungsvariablen überführt werden. Im nächsten Kapitel 5.1.1 werden Bilanzgleichungen für die neuen Variablen (ϑ^n, I_n) durch kanonische Transformation der linearisierten Ausgangsgleichungen hergeleitet.

5.1.1 Linearisierte Wellentheorie

Für ein spezielles physikalisches Problem lassen sich stets durch Linearisierung Bewegungsgleichungen herleiten, die den dynamischen Gleichungen des Hamiltonsystems $H = H_0$ freier Moden entsprechen. Die Herangehensweise stimmt mit der in Kapitel 3 verwendeten überein. Nach Reihenentwicklung der Hamiltonschen Gleichungen, mit Abbruch nach der ersten Ordnung, wird ein Fourier-Moden-Ansatz für die dynamischen Größen eingesetzt. Es ist auch möglich, das Hamiltonfunktional H_0 aus den Gesetzmäßigkeiten der klassischen Mechanik heraus abzuleiten (Anhang A1 (10.2)). Die Funktionale H_0 sind auf den kanonischen Orbits \mathcal{O} definierte Casimirfunktionen und damit automatisch Invarianten der Bewegung.

$$H_0 = \frac{1}{2} \left[p_k (p_k)^* + \sigma_k^2 q^k (q^k)^* \right], \quad (5.6)$$

Aufgrund der Integrabilität des kanonischen Systems mit dem Hamiltonfunktional H_0 existiert eine vollständig separierbare Prinzipalfunktion S . Die Funktion S ist die Erzeugende der kanonischen Transformation in Winkel-Wirkungsvariablen und als Lösung der Hamilton-Jacobi Gleichung gegeben.

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q^i, p_i) = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial q^k} \left(\frac{\partial S}{\partial q^k} \right)^* + \frac{\sigma_k^2}{2} q^k (q^k)^* = 0 \quad (5.7)$$

Es werden separable Lösungen S der HJ-Gleichung gesucht. Deshalb existieren die zwei Funktionen $W(q, Q)$ und $T(t, Q)$, aus denen sich die Prinzipalfunktion $S(q, Q, t)$ additiv zusammensetzt $S(q, Q, t) = W(q, Q) + T(t, Q)$. Nach dem Einsetzen von $S(q, Q, t)$ in die HJ-Gleichung und Sortieren der entstehenden W - und T -Terme auf die linke bzw. rechte Seite der Gleichung erhält man (5.8) als Ergebnis. Es treten keine Mischterme von W und T auf. Die Separationskonstante α in (5.8) entspricht der ursprünglichen Hamiltonfunktion $H_0(q, p)$.

$$\left(\frac{\partial W}{\partial q^k} \right)^2 + \sigma_k^2 (q^k)^2 = 2\alpha = -2 \frac{\partial T}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad W = \sqrt{\sigma_k^2} \int \sqrt{2\alpha/\sigma_k^2 - (q^k)^2} dq^k \quad (5.8)$$

Im Folgenden wird vorausgesetzt, dass S und q reell sind und T wird gleich $-\alpha t$ gesetzt. Das Integral auf der rechten Seite von (5.8) kann explizit ausgewertet werden. Uns interessiert aber nicht die konkrete Form der erzeugenden Funktion W , sondern die Transformation der Ausgangsgleichungen. Die Integration von (5.8b) würde eine zusätzliche Konstante zur Folge haben, die zu S addiert werden müsste. Es ist aber nicht notwendig, sie zu beachten, da alle Konstanten, die für die Transformation $\zeta = (q^i, p_i) \mapsto (\vartheta^n, I_n)$ benötigt werden, schon vorhanden sind.

Um die Transformation abzuschließen, muss $P = \partial_{q^k} S$, der konjugierte Impuls von Q , bestimmt werden. Dies wird indirekt getan, indem der konjugierte Impuls von α bestimmt wird. Es ist bekannt, dass die konjugierte Variable einer Energie-Variablen α eine Zeit-Variable β ist. In Gleichung (5.9)

besitzt β die Bedeutung eines Anfangswertes für die Zeit t .

$$\beta + t = \frac{\partial S}{\partial \alpha} + t = \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \frac{1}{\sqrt{\sigma_k^2}} \int \frac{dq^k}{\sqrt{2\alpha/\sigma_k^2 - (q^k)^2}} \quad (5.9)$$

Da α und β zueinander konjugierte Variablen sind, ist es sinnvoll, sie als neue kanonische Variablen einzuführen $(Q, P) = (\alpha, \beta)$. In diesem Fall entsprechen die Transformationsgleichungen $Q(q^k, p_k) = \alpha = H_0$ und $P(q^k, p_k) = \beta$ (eqn.(5.9)). Die invertierten Gleichungen sind durch $q^k(\alpha, \beta)$ und $p_k(\alpha, \beta)$ (5.11a,b) gegeben. Die neue Hamiltonfunktion ist, wie erwartet, gleich Null $K_0 = H_0 + \partial S/\partial t = \alpha - \alpha = 0$.

Aufgrund der vorausgesetzten Separabilität der HJ-Gleichung ist $p_k = p_k(\alpha, \beta)$ tatsächlich eine Funktion von α_k und $\beta(\alpha_k)$. Deshalb liegen die kanonischen Orbits auf Energie-Oberflächen die durch α_k gegebenen sind. Das α_k unabhängig von den anderen generalisierten Koordinaten (α_j, β_j) ($j \neq k$) ist, macht es so interessant für Untersuchungen der Trajektorien des Systems. Selbst wenn es unmöglich ist, eindeutige und vollständige Lösungen des Hamiltonschen Problems zu finden, können wesentliche Eigenschaften des Systems immer noch dargestellt werden.

Wir betrachten physikalische Systeme deren Orbits einen beschränkten Bereich des Phasenraums nicht verlassen. Für die kanonische Beschreibung von Oberflächenwellen werden geschlossene „Rotations“-Orbits verwendet, die nach dem Durchlaufen von mehreren „Loops“ zu ihrem Ursprungspunkt im Phasenraum zurückkehren. Wenn ein periodischer Ansatz für q_k in Gleichung (5.9) eingeführt wird, dann ist das Ergebnis der Integration von $\beta = \partial S/\partial \alpha$ gleich

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\sigma_k^2}} \int \frac{dq^k}{\sqrt{2\alpha/\sigma_k^2 - (q^k)^2}} - t = \frac{1}{\sqrt{\sigma_k^2}} \sin^{-1} \left(\sqrt{\sigma_k^2/2\alpha} q^k \right) - t. \quad (5.10)$$

Für die kanonischen Variablen q^k und $p_k = \partial_{q^k} S = \partial_{q^k} W$ können aus den Gleichung (5.10) und (5.8) die nachfolgenden Terme hergeleitet werden.

$$q^k = \sqrt{\frac{2\alpha}{\sigma_k^2}} \sin \vartheta^k \quad \text{and} \quad p_k = \sqrt{\sigma_k^2} \sqrt{\frac{2\alpha}{\sigma_k^2} - (q^k)^2} = \sqrt{2\alpha} \cos \vartheta^k \quad (5.11)$$

Bei der Berechnung von q^k und p_k wurde die Phasenfunktion $\vartheta^k = \sqrt{\sigma_k^2}(\beta + t)$ definiert. Es ist nun leicht zu überprüfen, dass die Separationskonstante α gleich dem Hamiltonfunktional H_0 ist, $H_0 = \frac{1}{2}(p_k^2 + \sigma_k^2 q_k^2) = \frac{1}{2}\sqrt{4\alpha^2}$.

Systeme mit n Freiheitsgraden besitzen Trajektorien, die auf einem n -Torus liegen T^n . Der Satz invarianter Tori füllt den $2n$ -dimensionalen Kotangententialraum T^*Q vollständig. Eine Trajektorie, die auf einem n -Torus startet, wird für alle Zeiten auf ihm bleiben. Deshalb ist die Variable, welche den n -Torus festlegt, eine Invariante der Bewegung. Das System ist vollständig Integrel (im Sinne von Liouville), wenn die n -Tori kompakt und n -dimensional sind. Dann existiert eine kanonische Transformation, die generalisierte Koordinaten (q^k, p_k) in Winkel-Wirkungsvariablen (ϑ^k, I_k) überführt. Eine Erzeugende dieser Transformation ist $\tilde{W}(q, I) = W(q, Q(I))$. In den neuen generalisierten Koordinaten entspricht die Hamiltonfunktion $\tilde{K}_0(\vartheta^k, I_k)$ der hergeleiteten Hamiltonfunktion $K_0(Q, P)$, als Funktion der neuen Variablen $(\vartheta^k, I_k = \alpha_k/\sigma_k)$ geschrieben. Da α_k konstant ist, und daher auch I_k eine Konstante ist, sind die konjugierten Koordinaten β^k und ϑ^k zyklisch. Deshalb hängt die Hamiltonfunktion \tilde{K}_0 nicht von der Winkel-Variablen ϑ^k ab. Die erzeugende Funktion $W(q, Q(I))$ kann auch dazu verwendet werden, die kanonische Variable ϑ^k zu definieren. Oft ist es aber schwierig, ϑ_k zu berechnen und die Frequenzen $\dot{\vartheta}^k = \partial \tilde{K}/\partial I_k = \sigma_k$ werden stattdessen betrachtet. In Winkel-Wirkungsvariablen ist die Dynamik des Problem dadurch gekennzeichnet, dass I_k eine Erhaltungsgröße ist und die Winkelvariable sich linear mit der Zeit ändert $\vartheta^k = \sigma_k t + \vartheta_0^k$. Dann

entspricht die Wirkungsvariable I_k dem Kurvenintegral von $p_k = \partial_{q^k} W$ entlang der geschlossenen Trajektorie.

$$I_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_k dq^k = \frac{1}{2\pi} \frac{2\alpha}{\sqrt{\sigma_k^2}} \int_0^{2\pi} \cos^2 \vartheta^k d\vartheta = \frac{\alpha}{\sigma_k}, \text{ wobei } dq^k = \sqrt{2\alpha/\sigma_k^2} \cos \vartheta^k d\vartheta \quad (5.12)$$

In Gleichung (5.12) wurde ausgenutzt, dass $\oint d\vartheta^k = 2\pi$ und $\vartheta^k = \partial \tilde{K} / \partial I_k$. Die Winkelvariable ϑ^k ist periodisch und nimmt bei jedem Durchlauf des Orbits um 2π zu. Die neue Koordinate ϑ^k beschreibt die Bewegung entlang der Trajektorie. Der n -dimensionale Torus, auf den die Bewegung projiziert wird, ist durch die neue Impulsvariable I_k festgelegt.

Nach dem Zusammentragen aller Ergebnisse der kanonischen Transformation und Identifizieren der Erzeugenden \tilde{W} mit $\tilde{W}(q, J)$ (Type 2) erhält man die folgenden Gleichungen.

$$p_k = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial q^k}, \quad \vartheta^k = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial J_k}; \quad K(\vartheta^k, I_k) = H(q(\vartheta^k, I_k), p(\vartheta^k, I_k)). \quad (5.13)$$

Unter Verwendung der Transformationsgleichungen $q^k = i\sqrt{2I_k/\sigma_k} \sin \vartheta^k$ und $p_k = \sqrt{2I_k\sigma_k} \cos \vartheta^k$ können die alten Variablen (q^k, p_k) als Funktion der neuen Variablen (ϑ^k, I_k) geschrieben werden.

Zum Schluss noch zwei Kommentare über die Einschränkungen, denen die Transformation der kanonischen Variablen in Winkel-Wirkungsvariablen unterliegt. Die Variablen (ϑ^k, I_k) können nur unter der Voraussetzung, dass Turbulenzeffekte vernachlässigbar sind, zur Charakterisierung des k -Torus herangezogen werden. Andernfalls würde ein Pfad auf dem Torus den gleichen Punkt nicht zwei Mal passieren, und die Trajektorien wären aperiodisch. Das Problem der Periodizität stellt eine ernsthafte Einschränkung der im (ϑ^k, I_k) -Bild beschreibbaren Dynamik dar. Für mögliche Trajektorien auf dem Torus müssen die Frequenzen a, b vergleichbar sein. Wenn ein Orbit a -mal und der andere Orbit b -mal durchlaufen worden ist, müssen beide zur gleichen Position zurückkommen. Nur rationale Verhältnisse $a/b \in \mathbb{Z}$ kommen in Frage. Allgemein sind alle reellen Zahlen als Frequenzen a, b erlaubt. Deshalb besitzt die Menge der vergleichbaren Frequenzen das Maß Null innerhalb der Menge aller möglichen Frequenzen.

Das zweite Argument beschäftigt sich mit der Frage, wie „optimal“ die Wahl der I_k ist. Entlang eines 1-Torus gibt es zwei verschiedene Arten von kreisförmigen Pfaden. Die eine Gruppe verläuft entlang der Großkreise des Torus. Die zweite Gruppe folgt imaginären Querschnitten durch den Torus. Diese Schnitte machen ihn topologisch äquivalent zu einem Zylinder mit periodischen Randbedingungen. Bisher haben wir uns bei den Betrachtungen in diesem Kapitel auf solche Orbits beschränkt. Generell sind aber alle möglichen Kombinationen von Pfaden erlaubt. Daher ist unbekannt, ob der Fluss der eingeführten Wirkungsvariablen tangential zu einem der beiden speziellen Wege hin ausgerichtet ist, oder einer allgemeineren Richtung folgt. Ohne zusätzliche Voraussetzungen müssen die beiden, zu den Wegen (1) und (2) gehörenden Frequenzen $\sigma_1 = \partial_t \vartheta_1^k$ und $\sigma_2 = \partial_t \vartheta_2^k$ nicht vergleichbar sein. Im Fall von Seegang wird von periodischen Trajektorien ausgegangen und der Wellenvektor \underline{k} in die kanonische Betrachtung eingeführt. Der Wert von $\vartheta_2^k = \sigma_k t - \underline{k} \cdot \underline{\tilde{x}}$ unterscheidet sich von ϑ_1^k um den Beitrag $\underline{k} \cdot \underline{\tilde{x}}$. Wenn die Bewegung entlang der Trajektorien des kanonischen Systems auf die Querschnittsflächen des Torus projiziert wird, erhält man das ursprüngliche Ergebnis $\sigma_1 = \sigma_2$. Für einen „optimalen“ Torus beträgt die Phasenverschiebung entlang des Torus vielfache von 2π oder ist vernachlässigbar gering.

Die Wirkungsvariable $I_k(k_i(X_j, T), X_i, T)$ ist eine mittlere Seeganggröße, die sich auf großen räumlichen $X_i = \tilde{x}_i/\varepsilon$ und zeitlichen $T = t/\varepsilon$ Skalen ändert ($\varepsilon \ll 1$). Da sie eine adiabatische Invariante der Bewegung (Gleichung (2.10)) ist, lassen sich die transformierten Bewegungsgleichungen wesentlich einfacher lösen. Für den Spezialfall linearer Seegangsmoden und einem verschwindenden Netto-Effekt der Source-Funktionen Q_i besitzen die Seegangsgleichungen die triviale Form $dI_k/dT = 0$. Im Falle nicht-stationärer Systeme $dI_k/dT = O(\varepsilon)$ (Kapitel 8.2), deren Energiebilanz durch nichtlineare

Effekte, windinduziertem Energieinput und Dissipation beeinflusst wird, entsprechen die Bilanzgleichungen den Beziehungen

$$\frac{d\vartheta^k}{dt} = \Omega_k = \sigma_k + k_i \cdot \langle v_i \rangle \quad \text{und} \quad \frac{dI_k}{dT} = \frac{\partial I_k}{\partial T} + \frac{\partial I_k}{\partial X_i} \dot{X}_i + \frac{dI_k}{dk_i} \dot{k}_i = \sum_j Q_j. \quad (5.14)$$

Das nächste Kapitel 5.3 beschäftigt sich mit der Frage, welchen Einfluss die nichtlineare Wechselwirkung von Seegangsmoden auf die zeitliche Entwicklung des Wellenfeldes hat. In (5.14b) ist dieser Beitrag auf der rechten Seite der Gleichung als Source-Funktion enthalten. Die linke Seite beschreibt die Dynamik linearer Seegangsmoden mit der Dispersionsrelation $\Omega_k = \sqrt{gk \tanh kh_e} + k_i \cdot \langle v_i \rangle$.

5.2 Phasendynamik und Radiationstress

In Kapitel (3.2.2) wurde eine Erhaltungsgleichung (3.39) für die Größe Wellenwirkung aus der Linearisierung des Lie-Poisson Systems (3.2) hergeleitet. Für die k -te Mode ist die Wirkungsvariable I_k gleich dem Quotienten aus Energie $E(k_i)$ und intrinsischer Frequenz $\sigma(k_i)$. Dabei ist $E(k_i)$ die über die Wassersäule integrierte Energiedichte $H_0(X_i, t)$, die nicht mehr von der Winkelvariablen ϑ^k abhängt. Es ist nun nicht weiter schwierig, eine Bilanzgleichung für die Seegangenergie $E_k = \frac{1}{2} \rho a_k^2$ ($a :=$ Amplitude der k -ten Mode) aus der Erhaltungsgleichung $dI_k/dT = 0$ (3.39) herzuleiten. Dazu müssen die spektralen und räumlichen Wirkungsflüsse berechnet werden, die nur von I_k und den Ableitungen der Frequenz $\Omega(X_i(T), (h_e, v_i, k_i)(X_j, T), T)$ abhängen.

$$\nabla_{X_i} \Omega = \sum_j [(\nabla_{k_j} \Omega) \nabla_{X_j} k_i + k_j \nabla_{X_i} v_j] + \frac{\partial \sigma}{\partial h_e} \nabla_{X_i} h_e \quad (5.15)$$

$$\text{und} \quad \nabla_{k_j} \Omega = v_j + \frac{\partial \sigma}{\partial k} \frac{k_j}{k} \quad (5.16)$$

In einem Zwischenschritt ist dabei die elementare Beziehung $\nabla_{X_i} k_j = \nabla_{X_j} k_i$ ausgenutzt worden. Nun wird die Wirkungsbilanzgleichung (5.14b) ($\sum_i Q_i = 0$) unter Verwendung des totalen Zeitableitungsoperators $d_T(\cdot) = \partial_T(\cdot) + \nabla_{k_i} \Omega \nabla_{X_i}(\cdot) - \nabla_{X_i} \Omega \nabla_{k_i}(\cdot)$ zerlegt.

$$0 = \frac{dI_k}{dT} = \frac{1}{\sigma_k} \left(\frac{dE_k}{dT} - \frac{E_k}{\sigma_k} \frac{d\sigma_k}{dT} \right) \quad (5.17)$$

$$= \frac{1}{\sigma_k} \left(\frac{dE_k}{dT} - \frac{E_k}{\sigma_k} \frac{\partial \sigma_k}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial T} - E_k \frac{\nabla_{k_i} \Omega}{\sigma_k} \frac{\partial \sigma_k}{\partial X_i} + E_k \frac{\nabla_{X_i} \Omega}{\sigma_k} \frac{\partial \sigma_k}{\partial k_i} \right) \quad (5.18)$$

Der Parameter $h_e(X_j, T)$ kennzeichnet die lokalen Eigenschaften des Mediums. In dem hier verwendeten Zusammenhang entspricht h_e der Meerestiefe. Es werden lineare Wellen betrachtet $\sigma_k = \sqrt{gk \tanh(kh_e)}$, deren Definition von Gruppen- und Phasengeschwindigkeit $c_g = \frac{\partial \sigma_k}{\partial k}$, $c = \frac{\sigma_k}{k}$ in die rechte Seite von Gleichung (5.18) eingesetzt wird. Dadurch ergeben sich folgende Zwischenergebnisse.

$$\frac{h}{\sigma_k} \frac{\partial \sigma_k}{\partial h} = \frac{c_g}{c} - \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \frac{k}{\sigma_k} \frac{\partial \sigma_k}{\partial k} = \frac{c_g}{c}. \quad (5.19)$$

Nach einigen elementaren Umformungen und Einsetzen der Kontinuitätsgleichung $\partial_T h_e = -\nabla_{X_i} h_e v_i$ erhält man die Beziehung $I_k \dot{\sigma}_k = \sum S_{ij} \cdot \nabla_{X_i} v_j$ als Ergebnis. Der Tensor S_{ij} entspricht dem zweidimensionalen, über die Wassersäule integrierten Radiationstress (4.77) aus Kapitel 4.3.2. Die Ener-

giebilanz des Seegangs $\dot{E}_k = -I_k \dot{\sigma}_k$ ist gleich (5.20).

$$0 = \frac{dE_k}{dT} - \frac{E_k}{\sigma_k} \sum_{ij} \left(\frac{\partial \sigma_k}{\partial k} \frac{k_i}{k} \frac{k_j}{k} + \frac{\partial \sigma_k}{\partial h_e} h_e \right) \frac{\partial v_i}{\partial X_j}$$

$$\frac{dE_k}{dT} = E_k \sum_{ij} \left[\frac{c_g}{c} \frac{k_i}{k} \frac{k_j}{k} + \left(\frac{c_g}{c} - \frac{1}{2} \right) \delta_{ij} \right] \frac{\partial v_i}{\partial X_j} \quad (5.20)$$

Die rechte Seite der Gleichung (5.20) enthält das Skalarprodukt des Radiationstress-Tensors S_{ij} mit $\partial_{X_j} v_i$. In der Impulsbilanzgleichung der Oberflächenströmung ist der Divergenzterm von S_{ij} mit entgegengesetztem Vorzeichen enthalten (4.24). Diese Dualität kennzeichnet den Radiationstress als Austauschgröße zwischen den beiden verschiedenskalierten Prozessen Seegang und Strömung. Für ein homogenes Wellenfeld mit konstanter Energie ist der Radiationstress gleich Null. Andernfalls wird dort, wo der Energieinhalt des Wellenfeldes sich durch Refraktion, Propagation, Windinput, Dissipation und nichtlineare Wechselwirkung ändert, Seegangenergie als zusätzliche Bewegungsenergie in das Strömungsfeld induziert.

5.3 Nichtlineare kanonische Störungstheorie

Ausgangspunkt der kanonischen Störungstheorie, wie sie in diesem Abschnitt vorgestellt wird, ist die Taylor-Entwicklung der Hamiltonschen Gleichungen aus Abschnitt 3. Eine Analyse der auftretenden Beiträge nichtlinearer Ordnung liefert eine Aussage über den Einfluss der nichtlinearen Wechselwirkung von Seegangsmoden auf die zeitliche Entwicklung des Wellenfeldes. Im Gegensatz zu den Arbeiten von K. Hasselmann (z.B. [Has61]) zu diesem Thema wird hier nur eine Entwicklung der Ausgangsgleichungen bis zur ersten nichtlinearen (der zweiten) Ordnung betrachtet. Das Ergebnis sind kanonische Gleichungen für die generalisierten Variablen (q^k, p_k) . Die Hamiltonfunktion H wird bei der Herleitung dieser Gleichungen in eine Potenzreihe (5.21) entwickelt. Durch Transformation der Variablen $(q^k, p_k) \mapsto (a_k^+, a_k^-)$ lässt sich eine symmetrische Orthonormalmodenzerlegung einführen [Kom94]. Die neuen Variablen $a_k^+ = 1/\sqrt{2\sigma_k}(p_{-k} - i\sigma_k q^k)$ und $a_k^- = 1/\sqrt{2\sigma_k}(p_{-k} + i\sigma_k q^k)$ sind zueinander adjungiert und nicht hermitisch. Die Mode a_{-k}^- entspricht dem komplex-konjugierten von a_k^+ . Auf diese Weise ist die Wirkungsvariable der k -ten Mode erster Ordnung durch das Produkt $I_k = a_k^+ a_{-k}^-$ gegeben.

Ohne das Winkel-Wirkungs-Variablen-Bild aufzugeben, soll nun eine Störungsanalyse des Problems durchgeführt werden. Dazu werden die Bewegungsgleichungen in Produktterme von a_k^+ und a_{-k}^- entwickelt. Als wesentliche Einschränkung ist die Möglichkeit resonanter Quadrupolwechselwirkungen nur noch durch zueinander resonante Dipole gegeben, $\underline{k}_1 + \underline{k}_3 = \underline{k}_2 + \underline{k}_4$ und $\sigma_1 + \sigma_3 = \sigma_2 + \sigma_4$. Die Seegangsmoden bilden zueinander konjugierte Paare $a_{k_1}^+ a_{-k_1}^-$ und $a_{k_2}^+ a_{-k_2}^-$. Für ein solches System ist die Hamiltonfunktion durch (5.21) gegeben. Wenn im weiteren Verlauf der Rechnung der Entwicklungskoeffizient $\hat{H}_1 = 1$ gesetzt wird, besitzt das Hamiltonfunktional (5.21) die Form eines anharmonischen Oszillators mit biquadratischem Wechselwirkungsterm.

$$H = \sigma_1 I_1 + \sigma_2 I_2 + \varepsilon \hat{H}_1 \sigma_1 \sigma_2 I_1 I_2 \quad (5.21)$$

Bei der Herleitung von Gleichung (5.21) wurden $q^k = i\sqrt{2I_k/\sigma_k} \sin \vartheta^k$ und $p_k = \sqrt{2I_k\sigma_k} \cos \vartheta^k$ in die Produktterme $a_k^+ a_{-k}^-$ eingesetzt ($I_k = I_{-k}$, $\sigma_k = \sigma_{-k}$). Die ersten beiden Terme auf der rechten Seite von Gleichung (5.21) entsprechen den Hamiltonfunktionen H_{01} und H_{02} des linearisierten Problems. Der dritte Term ist die Wechselwirkungs-Hamiltonfunktion beider Moden. Für nicht interagierende Moden ist dieser Term gleich Null. In diesem Fall kann der k -ten Mode über die

Wirkungsvariable I_k der invariante Torus T^k zugeordnet werden. Wenn aber die Wechselwirkungs-Terme höherer Ordnung mit in die Rechnung einbezogen werden, ist die Invarianz der I_k -Tori's nicht länger gegeben.

Im Folgenden werden autonome Hamiltonsche Systeme betrachtet und deren Integrabilität gefordert. Dann besitzt das schwach gestörte Problem seinen eigenen Satz invarianter \bar{I}_k -Tori. Wie bei dem ursprünglichen Problem, kanonische Transformationen zu finden, die kanonische Variablen (q^k, p_k) in Winkel-Wirkungsvariablen (ϑ^k, I_k) überführen, vereinfacht sich die Rechnung erheblich, wenn die zeitliche Entwicklung des Systems auf den \bar{I}_k -Tori betrachtet wird. Die Aufgabe besteht also darin, kanonische Transformationen zu finden, die den Satz alter Variablen $u_{alt} := (\vartheta^k, I_k)$ in den neuen Satz, leichter zu handhabender, kanonischer Variablen $u_{neu} := (\bar{\vartheta}^k, \bar{I}_k)$ überführen. Nach Transformation des ϑ^k -abhängigen Hamiltonfunktionals $H(\vartheta^k, I_k, t, \varepsilon)$ in das neue Hamiltonfunktional $K(\bar{\vartheta}^k, \bar{I}_k, t, \varepsilon)$, das eigentlich nur noch von der Wirkungsvariablen \bar{I}_k abhängt, können phasengemittelte Gleichungen für die Dynamik des gestörten Problems hingeschrieben werden. Das Ergebnis sind Gleichungen, wie wir sie auch erhalten hätten, wäre es möglich gewesen, die Dynamik des kompletten Systems von Beginn an zu lösen. Durch die transformierte Wirkungsvariable werden die \bar{I}_k -Tori ausgewählt, so wie vorher die invarianten Tori des ungestörten Problems durch I_k gegeben waren. Der Wert von \bar{I}_k enthält neben dem Beitrag der k -ten Mode auch noch die Korrekturen aufgrund der Dipolwechselwirkung zwischen den Moden.

Solange die Wellen nicht brechen, soll die der Periodizität des gestörten Problems auf den \bar{I}_k -Tori T^n gegeben sein $K_i(\bar{\vartheta}^k + 2\pi\hat{e}_i, \bar{I}_k, \varepsilon) = K_i(\bar{\vartheta}^k, \bar{I}_k, \varepsilon)$. Wir betrachten geschlossene Kurven $c(t)$ auf den T^n und definieren die Winkelvariable $\bar{\vartheta}^k$. Während eines Umlaufs variiert $\bar{\vartheta}^k$, wie auch ϑ^k , zwischen 0 und 2π . Aufgrund der geforderten Invarianz darf die kanonischen Variable \bar{I}_k ihren Wert entlang der Kurve $c(t)$ von einem auf den anderen Zyklus nicht ändern. Dann verschwindet der über den Torus T^n gemittelte Wert von $\partial K_i / \partial \bar{\vartheta}_k$ und die mittlere Wirkungvariable ist eine adiabatische Invariante $d\bar{I}_k/dt = -\sum \varepsilon^i \langle \partial K_i / \partial \bar{\vartheta}_k \rangle = 0$.

Für das ungestörte durch die Hamiltonfunktion H_0 beschriebene Problem sind Winkel-Wirkungsvariablen schon eingeführt worden. Nun soll gleiches für das gestörte Hamiltonische System $H = H_0 + \varepsilon H_1 + \dots$ geschehen, indem H_0 sukzessive um Terme von höherer Ordnung in ε erweitert wird. Nach systematischer Reihenentwicklung der Winkel-Wirkungsvariablen (ϑ^k, I_k)

$$\vartheta^k = \vartheta^{k(0)} + \varepsilon \vartheta^{k(1)} + \varepsilon^2 \vartheta^{k(2)} + \dots \quad (5.22)$$

$$I_k = I_k^{(0)} + \varepsilon I_k^{(1)} + \varepsilon^2 I_k^{(2)} + \dots, \quad (5.23)$$

kann das entstehende kanonische Gleichungssystem Ordnung für Ordnung in ε gelöst werden. Die Dynamik der gestörten Seegangsmode wird nun auf den \bar{I}_k -Tori betrachtet. Für eine endliche Anzahl von Ordnungen ist die Erzeugende $S = S_0 + \varepsilon S_1 + \dots$ der kanonischen Transformation $H(\alpha) \rightarrow K(\beta)$ als Lösung der Hamilton-Jacobi Gleichung (5.26) gegeben. Um Konvergenzprobleme der durch S generierten Reihen werden wir uns bei der Rechnung nicht kümmern. Die hier verwendete Erzeugende $S(\vartheta^k, \bar{I}_k, t, \varepsilon)$ der Transformation von H nach K ist vom Typ 2. Da gewährleistet sein muss, dass die von ihr generierten Transformationen für $\varepsilon = 0$ in Identitäts-Transformationen übergehen, ist $dS_0/dt = 0$. Im Allgemeinen sind die neuen kanonischen Koordinaten $(\bar{\vartheta}^k(\varepsilon, t), \bar{I}_k(\varepsilon, t))$ aufgrund der Zeitabhängigkeit von S ebenfalls zeitabhängig, selbst wenn die ursprünglichen es nicht waren. Um die Rechnung einfacher zu gestalten wird diese t -Abhängigkeit im Folgenden, sooft es möglich ist, vernachlässigt. Nach den üblichen Regeln für kanonische Transformationen sind die Gleichungen (5.22) und (5.23) für die Variablen ϑ^k und I_k dann äquivalent zu

$$S = \bar{I}_k \vartheta^k + \varepsilon S_1 + \varepsilon^2 S_2$$

$$\bar{\vartheta}^k = \frac{\partial S}{\partial I_k} = \vartheta^k + \varepsilon \frac{\partial}{\partial I_k} S_1(\vartheta^k, \bar{I}_k) + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial I_k} S_2(\vartheta^k, \bar{I}_k) + \dots \quad (5.24)$$

$$I_k = \frac{\partial S}{\partial \vartheta^k} = \bar{I}_k + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \vartheta^k} S_1(\vartheta^k, \bar{I}_k) + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \vartheta^k} S_2(\vartheta^k, \bar{I}_k) + \dots \quad (5.25)$$

Die Unabhängigkeit des neuen Hamiltonfunktionals $K = K_0 + \varepsilon K_1 + \dots$ von der Phase $\bar{\vartheta}^k$ kann nicht für jede Ordnung vorausgesetzt werden. Nur für $\varepsilon = 0$ ist $K \neq K(\bar{\vartheta}^k)$ nach Voraussetzung gegeben.

$$K(\bar{I}_k) = H(\vartheta(\bar{\vartheta}^k, \bar{I}_k), I(\bar{\vartheta}^k, \bar{I}_k)) + \frac{\partial S(\vartheta(\bar{\vartheta}^k, \bar{I}_k), \bar{I}_k)}{\partial t} \quad (5.26)$$

Um das neue Hamiltonfunktional zu bestimmen, muss der Satz alter Variablen (ϑ^k, I_k) , von denen K abhängt, als Funktion der neuen Variablen $(\bar{\vartheta}^k, \bar{I}_k)$ hingeschrieben werden. Die Gleichung (5.24) für die Winkelvariable $\bar{\vartheta}^k$ wird dazu entsprechend umgeformt.

$$\vartheta^k = \bar{\vartheta}^k - \varepsilon \frac{\partial}{\partial I_k} S_1(\vartheta^k, \bar{I}_k) - \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial I_k} S_2(\vartheta^k, \bar{I}_k) + \dots \quad (5.27)$$

$$I_k = \bar{I}_k + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \vartheta^k} S_1(\vartheta^k, \bar{I}_k) + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \vartheta^k} S_2(\vartheta^k, \bar{I}_k) + \dots \quad (5.28)$$

Für den Fall, dass die S_i bekannt sind, ist (5.27) und (5.28) ein vollständiges, gekoppeltes Gleichungssystem, das mit Hilfe eines iterativen Verfahrens gelöst werden kann. So aber muss die reihenentwickelte Hamilton-Jacobi Gleichung (5.26) für jede Ordnung separat gelöst werden. Dabei treten in der $O(\varepsilon^n)$ Gleichung unbekannte Funktionale $K_{i=1, \dots, n}$ und $S_{i=1, \dots, n}$ auf. Sowohl die Hamiltonfunktion K als auch die Erzeugende S sind Funktionen der alten Winkelvariablen $\vartheta^k(\bar{\vartheta}^k, \bar{I}_k)$ und der Wirkung $I_k(\bar{\vartheta}^k, \bar{I}_k)$ bzw. \bar{I}_k . Der $O(\varepsilon^0)$ -Term ist nach Konstruktion winkelunabhängig, was auf die Terme höherer Ordnung nicht mehr zutrifft.

Der nächste Schritt besteht nun darin, Gleichung (5.27) und (5.28) konsequent in die Hamilton-Jacobi Gleichung (5.26) einzusetzen. Dabei soll die Erzeugende in den $O(\varepsilon^n)$ -Termen nur von der alten Variablen ϑ^k abhängen. Eine Substitution der Winkelvariablen ist deshalb nicht notwendig. Im späteren Verlauf der Rechnung ermöglicht diese Vorgehensweise die Mittelung der Hamiltonfunktion K über die Zeitvariation der ungestörten Bewegung. Nach dem Einsetzen von I_k in Gleichung (5.26) und Identifizieren der Ordnungen von K durch Vergleichen der Exponenten von ε erhält man einen Satz von Differentialgleichungen für S_i und K_i .

$$K_0(\bar{I}) = H_0(\bar{I}) \quad (5.29)$$

$$K_1(\bar{I}) = \frac{\partial S_1}{\partial \vartheta^a} \left(\frac{\partial H_0}{\partial I_a} \right)_{I=\bar{I}} + H_1(\vartheta, \bar{I}) + \frac{\partial S_1(\vartheta, \bar{I})}{\partial t} \quad (5.30)$$

$$K_2(\bar{I}) = \frac{\partial S_2}{\partial \vartheta^a} \left(\frac{\partial H_0}{\partial I_a} \right)_{I=\bar{I}} + \frac{\partial S_1}{\partial \vartheta^a} \left(\frac{\partial H_1}{\partial I_a} \right)_{I=\bar{I}} + H_2(\vartheta, \bar{I}) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial I_a \partial I_b} \right)_{I=\bar{I}} \frac{\partial S_1}{\partial \vartheta^a} \frac{\partial S_1}{\partial \vartheta^b} + \frac{\partial S_2(\vartheta, \bar{I})}{\partial t} \quad (5.31)$$

Die unbekannt Funktionen S_i und K_i können nun durch Phasenmittelung der Gleichungen (5.29) bis (5.31) über die ungestörte Bewegung auf den I_k -Tori bestimmt werden. Da die Wirkungsvariablen I_k und \bar{I}_k nach einem Durchlauf der geschlossenen Kurven $c(t)$ auf den entsprechenden Tori ihre ursprünglichen Werte wieder einnehmen, sind die Ableitungen von S_i nach ϑ^k für $i \geq 1$ periodische Funktionen von ϑ^k . Diese Terme verschwinden nach Phasenmittelung $\langle \partial S_i / \partial \vartheta^a \rangle = 0$. Gleichzeitig wird gefordert, dass die Zeitabhängigkeit der Erzeugenden S_i die Periode τ besitzt. Dann verschwinden die phasengemittelten $\partial S_i / \partial t$ -Terme aufgrund des gleichen Argumentes. Es besteht kein grundsätzlicher Zusammenhang zwischen der zeitlichen Periode τ und der Winkelperiode. Für ein physikalisches System mit diesen Eigenschaften folgt aus der Anwendung des Mittelungsoperators

$$\langle F \rangle = \frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^n \int_0^\tau \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} F(\vartheta^1, \dots, \vartheta^n, \bar{I}_1, \dots, \bar{I}_n) d\vartheta^1 \dots d\vartheta^n dt \quad (5.32)$$

auf die Gleichungen (5.29) bis (5.31), dass die transformierten Hamiltonfunktionen K_i gleich

$$K_1(\bar{I}) = \langle H_1(\vartheta, \bar{I}) \rangle \quad (5.33)$$

$$K_2(\bar{I}) = \left\langle \frac{\partial S_1}{\partial \vartheta^a} \left(\frac{\partial H_1}{\partial I_a} \right)_{I=\bar{I}} + \frac{\partial S_1}{\partial \vartheta^a} \frac{\partial S_1}{\partial \vartheta^b} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma_0^a}{\partial I_b} \right)_{I=\bar{I}} + H_2 \right\rangle \quad (5.34)$$

sind, wobei $\partial H_0 / \partial I_a = \sigma_0^a$ gesetzt wurde. Um die Erzeugende der Transformation zu bestimmen werden die Resultate (5.33) und (5.34) des Mittelungsprozesses in die Gleichung (5.29) bis (5.31) eingesetzt. Es reicht aus, S_1 zu bestimmen, da $O(\varepsilon^3)$ -Terme und höhere Ordnungen bei der Entwicklung vernachlässigt werden.

$$\langle H_1(\vartheta, \bar{I}) \rangle - H_1(\vartheta, \bar{I}) = \sigma_0^a \frac{\partial S_1}{\partial \vartheta^a} + \frac{\partial S_1}{\partial t} \quad (5.35)$$

$$K_2(\bar{I}) - H_2(\vartheta, \bar{I}) = \sigma_0^a \frac{\partial S_2}{\partial \vartheta^a} + \frac{\partial S_1}{\partial \vartheta^a} \left(\frac{\partial H_1}{\partial I_a} \right)_{\bar{I}} + \frac{\partial S_1}{\partial \vartheta^a} \frac{\partial S_1}{\partial \vartheta^b} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma_0^a}{\partial I_b} \right)_{\bar{I}} \quad (5.36)$$

Die Erzeugende S der Transformation ist nach Voraussetzung periodisch in allen Winkeln ϑ^k und in der Zeit. Die linke Seite der Gleichung (5.35) kann deshalb in Fourier-Moden zerlegt werden. Dieser Anteil des Hamiltonfunktionals H ist im Allgemeinen nicht konstant. Eine Beziehung (5.37) für die Differenz von $K_1 = \langle H_1 \rangle$ (5.33) und H_1 kann aus Gleichung (5.35) nach Zerlegung der Erzeugenden S_1 in Fourier-Moden hergeleitet werden ($l, m \in \mathbb{Z}$).

$$\langle H_1 \rangle - H_1 \equiv - \sum_{l,m} H_{1l,m}(\bar{I}) e^{i(m_a \vartheta^a + lt/\tau)} = i(\sigma_0^a m_a + l/\tau) S_1. \quad (5.37)$$

Aufgrund der Fourier-Zerlegung von S_1 ist die transformierte Hamiltonfunktion $K_1 = \langle H_1 \rangle$ für den hier betrachteten Fall (5.21) unabhängig von der Winkelvariablen ϑ^k (mit $\hat{H}_1 = 1$).

$$K = \sigma_0^1 \bar{I}_1 + \sigma_0^2 \bar{I}_2 + \varepsilon \sigma_0^1 \sigma_0^2 \bar{I}_1 \bar{I}_2 + O(\varepsilon^3) \quad (5.38)$$

Die Frequenzen $\bar{\sigma}_i$ der auf den Torus T^n transformierten Bewegung sind gleich $\bar{\sigma}_i = \sigma_i + \varepsilon \tilde{\sigma}_i$ ($i, j = 1, 2$), wobei $\tilde{\sigma}_j = \sigma_1 \sigma_2 \bar{I}_{i \neq j}$ ist. Als nächstes werden nun die Korrekturen erster Ordnung der Erzeugenden S aus Gleichung (5.39) berechnet.

$$\left(\sigma_0^1 \frac{\partial}{\partial \vartheta^1} + \sigma_0^2 \frac{\partial}{\partial \vartheta^2} \right) S_1 = -(\langle H_1 \rangle - H_1) \quad (5.39)$$

Nach Gleichung (5.37) sind die Koeffizienten der fourierzerlegten rechten Seite von (5.39) durch (5.40) gegeben.

$$H_{1(m_1, m_2)} = \frac{\sigma_0^1 \sigma_0^2 I_1 I_2}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i(m_1 \vartheta^1 + m_2 \vartheta^2)} d\vartheta^1 d\vartheta^2 \quad (5.40)$$

Für $m_1, m_2 = \pm 2$ ist $H_{1(\pm 2, \pm 2)} = K_1$, für $m_1 = \pm 2$ und $m_2 = 0$ folgt, dass $H_{1(\pm 2, 0)} = H_{1(0, \pm 2)} = -K_1$ und für $m_1, m_2 = 0$ sowie den restlichen Kombinationen von m_1 und m_2 ist $H_{1(m_1, m_2)} = 0$. Die Erzeugende S_1 ist deshalb durch (5.41) gegeben.

$$\begin{aligned} S_1 &= i \sum_{m_1, m_2} \frac{H_{1(m_1, m_2)}(\bar{I})}{m_1 \sigma_0^1 + m_2 \sigma_0^2} e^{i(m_1 \vartheta^1 + m_2 \vartheta^2)} + c.c. \\ &= \frac{1}{2} I_1 I_2 \left(-\frac{\sigma_0^1 \sigma_0^2}{\sigma_0^1 + \sigma_0^2} \sin 2(\vartheta^1 + \vartheta^2) - \frac{\sigma_0^1 \sigma_0^2}{\sigma_0^1 - \sigma_0^2} \sin 2(\vartheta^1 - \vartheta^2) \right) + \\ &\quad \left(\sigma_0^1 \sin 2(\vartheta^1) + \sigma_0^2 \sin 2(\vartheta^2) \right) \equiv \frac{1}{2} I_1 I_2 F(\vartheta^1, \vartheta^2). \end{aligned} \quad (5.41)$$

Nach kanonischer Transformation der Variablen $(\vartheta^k, I_k) \mapsto (\bar{\vartheta}^k, \bar{I}_k)$ unter Verwendung der Erzeugenden $S_1 = \frac{1}{2}I_1I_2F(\vartheta^1, \vartheta^2)$ erhält man folgendes Ergebnis:

$$\bar{\vartheta}^1 = \vartheta^1 + \varepsilon I_2 F(\vartheta^1, \vartheta^2), \quad \bar{I}_1 = I_1 + \varepsilon I_1 I_2 \frac{\partial F(\vartheta^1, \vartheta^2)}{\partial \vartheta^1} \quad (5.42)$$

$$\bar{\vartheta}^2 = \vartheta^2 + \varepsilon I_1 F(\vartheta^1, \vartheta^2), \quad \bar{I}_2 = I_2 + \varepsilon I_1 I_2 \frac{\partial F(\vartheta^1, \vartheta^2)}{\partial \vartheta^2} \quad (5.43)$$

Auf den ersten Blick wird in Gleichung (5.41) deutlich, was man unter dem Resonanz-Problem der klassischen Störungstheorie versteht. Wenn sich im Fall resonanter Moden die beiden Frequenzen $\pm\sigma_0^1$ und $\pm\sigma_0^2$ entsprechen, dann verschwindet ein Nenner von $F(\vartheta^1, \vartheta^2)$ und die verwendete Methode liefert keine Lösungen mehr. An diesem Punkt ist es nicht mehr möglich, die Winkel-Wirkungsvariablen $(\bar{\vartheta}^k, \bar{I}_k)$ zu finden, die aus der ursprünglichen Beschreibung durch kanonische Transformation hervorgegangen sind. Nur für den höchst unwahrscheinlichen Fall, dass $H_{1(m_1, m_2)}$ und damit auch K_1 bei auftretender Resonanz ebenfalls verschwinden, ist die hier vorgestellte Methode dann noch sinnvoll. Im Allgemeinen beschränkt man sich auf den Fall Nicht-Resonanter Oszillatoren $\pm\sigma_0^1 \neq \pm\sigma_0^2$.

Problematisch wird die Rechnung auch, wenn einer der Nenner sehr klein ist. Dann ist der entsprechende Term in Gleichung (5.41) sehr groß und selbst dem Parameter ε gelingt es nicht mehr, den Einfluss der Störung auf die Entwicklung des Wellenfeldes zu begrenzen. Da die Anfangsbedingungen der Modellrechnungen oft so gewählt werden, dass sie in der Nähe von Punkten liegen, an denen einer der Nenner verschwindet, ist diese Situation nicht selten gegeben. Solange die Frequenzen aber genügend irrational zueinander sind, womit gemeint ist, dass sie die Ungleichung $|\sum_k^n m_k \sigma_k^1| > K(\varepsilon)(\sum_k^n |m_k|)^{-(n+1)}$ erfüllen ($K(\varepsilon) \rightarrow 0$ für $\varepsilon \rightarrow 0$), kann ein geeigneter Satz invarianten Tori T^n des „schwach“gestörten Systems $\varepsilon \ll 1$ gefunden werden. Das ist die Aussage des *KAM*-Theorems (Kolmogorov, Arnold und Moser). Die Tori miteinander wechselwirkender Seegangsmoden gleichen schwach deformierten Tori des ungestörten Systems.

Um die resonante, nichtlineare Wechselwirkung der Seegangsmoden in die Modellierung von Wellen mit einzubeziehen, wird eine, zunächst willkürlich erscheinende, Phasenwinkeldifferenz von $\Delta\vartheta = \pi/2$ zwischen den Moden vorausgesetzt. Gleichung (5.41) ist dann äquivalent zu dem Gleichungssystem (2.136) und (2.137) auf Seite 123 in [Kom94]. Nach dem Einsetzen von $\vartheta^1 = \sigma_0^1 t$ und $\vartheta^2 = \sigma_0^2 t$ in das Funktional $F(\vartheta^1, \vartheta^2)$ verschwindet im Resonanzfall der entsprechende Sinus-Term von Gleichung (5.41). Die Winkelvariable ϑ^k hängt dann nur noch linear von der Zeit t ab. In diesem Fall besitzen auch resonante Seegangsmoden invariante Tori. Sie werden durch die zu $\bar{\vartheta}^k$ konjugierte Wirkungsvariable \bar{I}_k festgelegt. Aufgrund von (5.42) und (5.43) hängen die Korrekturterme von \bar{I}_k von den Ableitungen $\partial F/\partial \vartheta^1$ und $\partial F/\partial \vartheta^2$ ab. Um nun zu verhindern, dass Terme höherer Ordnung in ε die zeitliche Entwicklung von \bar{I}_k dominieren, wird die oben besprochene Phasendifferenz $\Delta\vartheta = \pi/2$ in die Cosinus-Terme $\cos[2(\sigma_0^1 \pm \sigma_0^2)t + \Delta\vartheta]$ der Ableitungen von F eingeführt. Dann können im Fall $\sigma^1 = \sigma^2$ die Phasenwinkel $\bar{\vartheta}^1$ und $\bar{\vartheta}^2$ sehr groß werden. Das ist aber weniger kritisch, da man aufgrund der Periodizität des Problems $\bar{\vartheta}^k$ nur Werte zwischen 0 und 2π annehmen kann. Außerdem wurden bei der Herleitung von Gleichung (5.42) und (5.43) nicht etwa die neuen, sondern die alten Winkelvariablen ϑ^k als Phasenraumkoordinaten (ϑ^k, \bar{I}_k) eingeführt. Daher ist es nicht notwendig, $\bar{\vartheta}^k$ als zusätzliche kanonische Variable zu betrachten. Im Resonanzfall hängt die Wirkung \bar{I}_k nur noch linear von der Zeit ab (Nach Linearisierung von $\partial F/\partial \vartheta^k$).

Wir betrachten ein zum Zeitpunkt $T_0 = t_0/\varepsilon$ (mit $\varepsilon \ll 1$) homogenes Seegangsfeld, das von den lokalen Gegebenheiten über die Funktion $h_e(X_j, T)$ abhängt, und führen die Bezeichnung $\partial F/\partial \vartheta^k = \kappa T$ ($\kappa \in \mathbb{R}$) ein. Dabei beschränken wir uns auf autonome Systeme, woraus für die Wirkungsvariable \bar{I}_k nicht nur adiabatische, sondern auch generelle Invarianz folgt ($d\bar{I}_k/dT = 0$). Während eines Zeitschrittes ΔT wird die Energie innerhalb des Spektrums durch Propagation, Refraktion und nichtlineare Wechselwirkung umverteilt. Aus Gleichung (5.42) bzw. (5.43) kann nach Einsetzen der Evolutionsgleichung $dI_k/dT = (dE_k/dT - I_k \sum S_{ij} \nabla_j v_i)/\sigma^k \neq 0$ die folgende Beziehung hergeleitet

werden:

$$\frac{dI_k}{dT} = -\varepsilon \frac{d(I_k I_l \kappa \cdot t)}{dT} = -\varepsilon \kappa - \sum_{k,l=1}^2 \sum_{k \neq l} \left[\frac{dE_k}{dT} - I_k \sum_{ij} S_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial X_j} \right] \frac{I_l}{\sigma^k} \varepsilon^F. \quad (5.44)$$

In Gleichung (5.44) wurde ausgenutzt, dass $\kappa \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist und die zeitliche Entwicklung der Frequenz $\sigma^k = \dot{\vartheta}^k$ von der Größe Radiationstress S_{ij} kontrolliert wird. Dann ist der erste Term auf der rechten Seite von Gleichung (5.44) vernachlässigbar. Falls die nichtlineare Wechselwirkung der Seegangsmoden keinen nennenswerten Beitrag zu S_{ij} liefert, können die beiden Terme in der eckigen Klammer von Gleichung (5.44) zur totalen Zeitableitung des Energiefunktional $E_k + E_{0k}$ zusammengefasst werden. Mit E_k wird die Energie der k -ten Mode des gestörten Problems und mit E_{0k} die Energie der entsprechenden freien Mode auf dem Torus T_0^n des ungestörten Problems ($dE_{0k}/dt - I_k \sum S_{ij} \nabla_j v_i / \sigma^k = 0$ bezeichnet). Es hängt nun davon ab, ob die Energie der k -ten Mode sich zeitlich stärker durch nichtlineare Wechselwirkung oder aufgrund von Refraktion und Propagation ändert. Im Tiefwasserfall wird das Seegangsfeld homogen bleiben und die nichtlineare Wechselwirkung den spektralen Energietransport bestimmen. In Küstennähe aber, wo die Refraktion stärker zu werden beginnt, können die nichtlinearen Anteile in den Bilanzgleichungen der kanonischen Variablen ϑ^k und I_k vernachlässigbar klein sein. Die Philosophie des k -Modells basiert im wesentlichen auf dieser Tatsache [Sch98]. Die Anwendbarkeit des Modells wurde auf den küstennahen Raum eingeschränkt. Dort kann die nichtlineare Wechselwirkung der Seegangsmoden, üblicherweise als Sourceterm in das numerischen Modell integriert, durch einen nichtlinearen Dissipationsterm ausgedrückt werden.

Wenn anstelle von I_k die lineare Lösung der Wirkungsbilanzgleichung in die rechte Seite von Gleichung (5.44) eingesetzt wird, dann verschwindet der Term innerhalb der Klammer, und die Dynamik der Wirkungsvariablen I_k ist durch $dI_k/dT = -\varepsilon \kappa$ gegeben. Zu jedem Zeitpunkt T ist dann

$$0 = \frac{dI_k}{dT} + \varepsilon \kappa = \frac{\partial}{\partial T} (I_k + \varepsilon \kappa T) + \frac{\partial I_k}{\partial h} \frac{\partial h(X_i)}{\partial X_i} \cdot \underline{c}_g + \frac{\partial I_k}{\partial k_i} \frac{\partial k_i}{\partial t}. \quad (5.45)$$

Wenn die Wirkung I_k explizit zeitunabhängig ist, wächst der erste Term auf der rechten Seite von Gleichung (5.45) linear in der Zeit an. Dann hängt es vom Verhältnis der spektralen und räumlichen Wirkungsflüsse (2. & 3. Term) zum Beitrag des ersten Terms auf der rechten Seite ab, ob die nichtlineare Wechselwirkung vernachlässigbar ist.

Kapitel 6

Konzept des gekoppelten Modells

Das am Bundesamt für Seeschifffahrt und Hydrographie (BSH) installierte gekoppelte Modell für Seegang und Strömung vereint das dreidimensionale (3-D) hydrodynamische Modell des BSH (S. Dick et al 2001 [BSH01]) mit dem spektralen Wellenmodell, k -Modell (2-D), der GKSS. Das k -Modell (Schneegenburger [Sch98]) ist ein aus der WAM-Familie [WAM88] stammendes Seegangmodell, das komplett im Wellenzahlraum formuliert worden ist. Es vernachlässigt den nichtlinearen Energietransfer (Hasselmann, 1961 [Has61]) in der spektralen Transportgleichung und verwendet einen nichtlinearen Dissipations-Term (Rosenthal, 1989 [Ros89]). Wesentliche Unterschiede zwischen beiden Modell-Komponenten sind neben der Dimensionalität auch die Struktur der Modelle. Im Gegensatz zum deterministischen Prognosemodell des BSH ist das deterministische Wellenmodell spektral aufgelöst. Das Spektrum charakterisiert den Zustand der linearen Oberflächenwellen innerhalb eines festgelegten Teilgebiets des \mathbb{R}^2 . Die räumlichen und zeitlichen Skalen, auf denen sich die Entwicklung des Wellenspektrums vollzieht, sind wesentlich größer als die Periode und Wellenlänge des Seegangs. Verglichen mit den typischen Skalen der mittleren Strömung ist Seegang immer noch ein Subskalensprozess. Das macht eine getrennte numerische Behandlung der mittleren Strömung und der linearen Seegangsmoden möglich.

Das gekoppelte Modell beschreibt die zeitliche Entwicklung linearer Wellen $\delta^{(1)}u$ und die Dynamik des mittleren Zustands ($u_e + u_{sd}$) in Abhängigkeit von externen Feldern (z.B. Wind, Strömung), Anfangs- und Randbedingungen. Im Gegensatz zur mittleren Strömung wird der Seegang durch ein zweidimensionales Oberflächenmodell simuliert. Eine Erweiterung des Wellenmodells auf die vertikale Dimension ist nicht vorgesehen. Der Einfluss tiefenabhängiger Strömungsfelder auf die Refraktion und Propagation des Wellenfeldes wird nicht berücksichtigt. Im k -Modell wird vorausgesetzt, dass die Oberflächenströmung homogen über die gesamte Wassersäule verteilt ist. Bei der Applikation der Modellergebnisse wird daher die Unabhängigkeit der Phasenbeziehung linearer Seegangsmoden von der Tiefe gefordert. Die tiefenabhängige Skalierung der Wellenamplitude bewirkt eine Reduzierung des seegangsinduzierten Impulsbetrags in den tiefer liegenden Schichten. In Kapitel 4.3 wurde eine dreidimensionale Formulierung des Radiationstress-Tensor für ein solches System hergeleitet. Der seegangsinduzierte Impuls nimmt mit der z -Koordinate so stark ab, dass als Vereinfachung angenommen werden kann, dass der gesamte über die Wassersäule integrierte, Betrag nur in der obersten 8 m Schicht wirksam ist. Um Rechenzeit zu sparen wurde bei den in Kapitel 7.2 und 7.3 ausgewerteten Modellrechnungen in dieser Weise verfahren.

Der Deutsche Wetterdienst (DWD) stellt den meteorologischen Input für das gekoppelte Modell zur Verfügung. Ein vollständiges Modellsystem (Atmosphäre-Wellen-Strömung), welches den Einfluss von Seegang auf die Schub- und Scherspannungen an der Meeresoberfläche (Windschubspan-

nung) und am Boden berücksichtigt, ist derzeit nicht vorhanden. Die in den Kapitel 7.2 und 7.3 präsentierten Ergebnisse beruhen auf Simulationen mit einem gekoppelten Modell für Seegang und Strömung. Sowohl der meteorologische Input an der Oberfläche als auch die Dissipationsprozesse innerhalb der Wassersäule und am Boden werden im Seegangs- und Strömungsmodell separat betrachtet. Der Energie und Impuls Transport aufgrund von Windantrieb und turbulenter Dissipation wird entscheidend von subskaligen Prozessen bestimmt, die in beiden Modell-Komponenten unterschiedlich parametrisiert worden sind. Bisher hat sich die Welt der Seegangs- und Strömungsmodellierung getrennt entwickelt. Eine Zusammenführung beider Seiten ist nur über das Einführen von Wechselwirkungs-Größen, wie der Divergenz des Radiationstress in der Impulsbilanzgleichung der mittleren Strömung, bewerkstelligt worden. In Kapitel 8 wird eine Vereinheitlichung der Windschubspannungs-Parametrisierung beider Modellkomponenten durchgeführt. Das Ergebnis ist überraschend. Es ist prinzipiell möglich, den meteorologischen Input von Energie und Impuls in das Strömungsmodell durch den spektralintegrierten Input in das Seegangsmodell zu ersetzen. Außerhalb des küstennahen Bereichs sind die Ergebnisse zweier Modelle, die sich nur durch die Formulierung des Windinputs unterscheiden, nahezu identisch. Im Küstennahfeld, wo die Struktur der Wind- und Seegangsfelder aufgrund der Begrenzung des Fetch recht unterschiedlich sein können, ist eine solche Übereinstimmung nicht zu erwarten.

6.1 Das Zirkulationsmodell des *BSH* (*BSHcmod*)

Die Simulation von geohydrodynamischen Prozessen hat eine lange Tradition am BSH. Bereits im Jahr 1983 wurde von Soetje und Brockmann [SoB83] ein hydrodynamisches Modell für die Nordsee installiert, das auf einem in den 1980er Jahren von Backhaus [Back80] entwickelten Modell der Deutschen Bucht basiert. Vorarbeiten zu diesem Modell sind seit den 1950er Jahren, als erstmals leistungsfähige Rechner zur Verfügung standen, am Institut für Meereskunde der Universität Hamburg geleistet worden. Das dort vorhandene zwei-dimensionale, barotrope Modell wurde 1971 erstmals auf die vertikale Dimension erweitert [Sun71]. Das ursprüngliche Modell des BSH, welches Vorhersagen über Strömungen, Wasserstände und die Ausbreitung von Schadstoffen erlaubte, hat seitdem eine kontinuierliche Weiterentwicklung erfahren. Es wurde von einem barotropen auf ein baroklin prognostisches Modell umgestellt, Advektionsverfahren für Temperatur und Salinität eingebaut und neben einer verbesserten Turbulenz-Parametrisierung auch die Dynamik und Thermodynamik von Meereis berücksichtigt [KIS95]. Die Einarbeitung des Seeganges stellt den vorläufig letzten Schritt zu Vervollständigung des Zirkulationsmodells dar.

Das *BSHcmod* löst die hydrodynamischen primitiven Gleichungen auf einem stationären und regulären Modellgitter. Das räumliche Diskretisierungs-Schema besteht aus ortsfesten Ebenen, d.h. z -Koordinaten in der vertikalen Dimension und einem Arakawa-C-Gitter in der horizontalen Dimension. Die horizontale Gitterauflösung ist mit 1nm in der Deutschen Bucht verglichen mit der vertikalen Auflösung gering. Die vertikale Ausdehnung des Gitters beträgt 8m in der obersten Schicht und 4m in den darunter liegenden Schichten. Die Mächtigkeit der obersten Zelle ist doppelt so groß gewählt um ein Trockenfallen von Gebieten außerhalb des Wattenmeeres zu verhindern. Aufgrund der sphärischen Koordinatenbeschreibung variiert die Größe einer Gitterzelle in Nord-Süd Richtung. Die auf dem Zeta-Punkt in der Mitte der Gitterzelle transformierte Strömungsgeschwindigkeit und die lokale Wassertiefe bilden den Satz zirkulationsabhängiger Input-Größen im Wellenmodell.

Das Simulationsraster des *BSH* unterteilt sich in drei einander überlappende Modell-Gitter [6.1], deren Auflösung mit zunehmender Nähe zu den deutschen Küstengebieten hin ansteigt. Beginnend mit dem größten numerischen Raster für den Nordost Atlantik (NOA-Modell; horizontalen Gitterauflösung: 1 Zelle pro $(24 \times 24) \text{nm}^2$) steigt die Anzahl von Gitterzellen pro Referenzgebiet schrittwei-

se an. Im Nord- Ostsee Gitter (NO-Modell) ist sie mit 16 Zellen pro $(24 \times 24) \text{ nm}^2$ um einen Faktor 36 geringer als in der deutschen Bucht und der südwestlichen Ostsee (DB-Modell) $24^2 = 576$ Zellen pro $(24 \times 24) \text{ nm}^2$ Seegebiet. Das zwei-dimensionale NOAA-Modell wurde in den Modell-Verbund integriert, um meteorologisch forcierte Wasserstandsdifferenzen am Nordsee-Rand zu berechnen. Das Gezeitensignal in der Nordsee wird durch harmonische Analyse von 14 Partial-Tiden ermittelt und geht als Dirichletsche Randbedingung für den Wasserstand auf dem Nordsee Rand in die Simulation ein. Die beiden dreidimensionalen und interaktiv gekoppelten baroklinen Zirkulationsmodelle für die Nord- und die Ostsee besitzen Neumannsche Randbedingungen. Der Gradient einer modellierten Variable wird über den Rand hinweg zu Null gesetzt.

An den offenen Rändern der Modellgebiete werden die berechneten Massenflüsse aus dem nächst größeren Raster eingespeist. Da aber jedes Modell-Gitter auch das Gebiet des nächst feineren Rasters abdeckt, ist es unnötig, die ausströmenden Massenflüsse des höher aufgelösten Modells im größeren Modell zu berücksichtigen. Die Randbedingung des Nordost-Atlantik Modells bildet eine Ausnahme, da keine Information über die Verhältnisse außerhalb des Modell-Gebietes vorliegt. Daher werden keine über den offenen Rand hinweg einströmenden Massenflüsse in das NOAA-Modell eingespeist. Damit Gravitationswellen ungehindert, das heißt reflektionsfrei über den offenen Rand hinweg aus dem Modell-Gebiet heraus propagieren können, wurde eine „radiation“-Bedingung installiert.

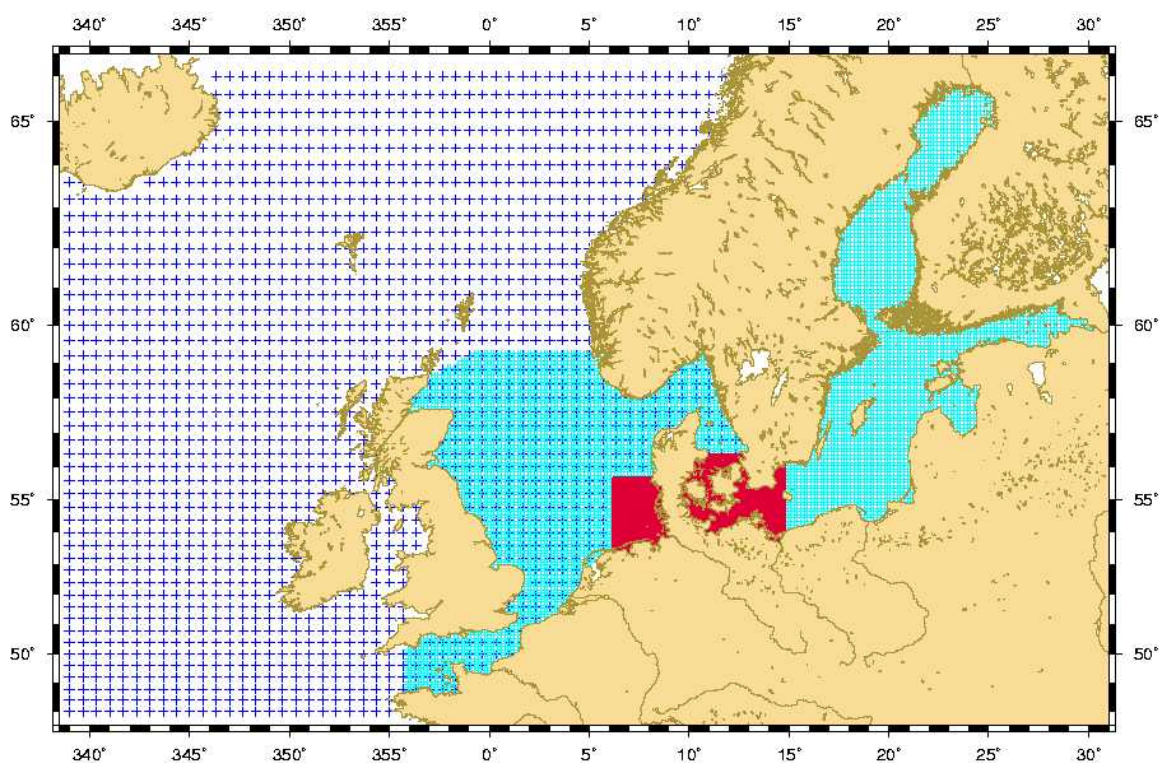


Abbildung 6.1: Schematische Darstellung der Simulationsraster des *BSH*-Zirkulationsmodells: Nordost Atlantik (NOA-Modell, dunkelblau) 24 nm , Nord- und Ostsee (NO-Modell, hellblau) 6 nm , mit einem eingepassten 1 nm (DB-Modell, rot) Gitter für die Deutsche Bucht und die südwestliche Ostsee.

Die in das *BSHmod* implementierten „mechanischen“ Bilanzgleichungen sind gleich

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial T} = -\frac{\partial}{\partial X_j} (\tau_{ij}(\underline{v}, h_e) - S_{ij}(\underline{v}, h_e)) - \varepsilon_{ijk} f_j v_k \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial T} = \frac{\partial \rho v_j}{\partial X_j} \quad \text{und} \quad \frac{d\rho}{dT} = 0, \quad (6.2)$$

wobei $\tau_{ij} = \rho v_i v_j + \mu \nabla v_i + \delta_{ij}(p + \phi)$ ($\phi(z) = \rho g z$ Geopotential, μ Viskosität des Fluids) den Impulsfluss-Tensor und S_{ij} den dreidimensionalen Radiationstress-Tensor in der Tiefe h_e kennzeichnet (Kapitel 4.3, Gleichung(4.73)).

$$S_{ij} = \left(\frac{k_i k_j}{k^2} + \delta_{ij} \right) E(\underline{X}, \underline{k}, T) \frac{\sinh(2kh_e) + 2kh_e}{2 \sinh(2kh_e)} - \delta_{ij} E(\underline{X}, \underline{k}, T) \frac{\cosh(2kh_e)}{2 \sinh^2(2kh_e)} \quad (6.3)$$

Die in (6.1) und (6.2) zusammengefassten Gleichungen wurden aufgrund ihrer Relevanz für die Kopplung von Seegang und Strömung ausgesucht. Das komplette Gleichungssystem umfasst noch Bilanzgleichungen für den Wärmeinhalt und Salzgehalt des Wasserkörpers sowie eine Berücksichtigung vertikaler Kopplung in den mechanischen Bilanzgleichungen. Die Gleichungen des vom Seegang unbeeinflussten Systems sind in vielen Lehrbüchern, zum Beispiel in [War93] (Z.U.A. Warsi, 1993) Kapitel 2, dargestellt.

6.2 Das Wellenmodell der GKSS (k -Modell)

Die Modellierung des Seegangs-Aspektes im gekoppelten Modell basiert auf einer Mesoskalen-Beschreibung der zeitlichen Entwicklung des Wellenfeldes. Die dabei verwendete mathematische Darstellung des Wellenfeldes ist das Seegangs-Spektrum. Im k -Modell [Sch97] wird eine statistische Beschreibung der Meeresoberfläche dazu verwendet, das Energiespektrum $E(\underline{k}(\underline{x}, t), \underline{x}, t)$ als Fourier transformierte Zwei-Punkt Kovarianz-Funktion der Oberflächenauslenkung $\zeta(\underline{x}, t)$ herzuleiten. Eine detailliertere Beschreibung dieser Methode ist in Komen et al. (1994) [Kom94] zu finden. Die zentrale Gleichung bei der Modellierung von Seegang ist die Wirkungsbilanzgleichung (6.4). Die unter *WKB*-Bedingungen (d.h. langsam veränderliche Amplitude (3.2)) für monochromatische Wellenzüge mit kleiner Amplitude definierte Größe Wellenwirkung ist gleich der phasengemittelten Seegangsenergie geteilt durch die intrinsische Frequenz ($I = \langle E \rangle / \sigma$). Für den Fall, dass die Summe der Source-Funktionen S_i gleich Null ist, besitzt die Wirkungsbilanz (6.4) die Form einer Erhaltungsgleichung, bei der die Rate, mit der sich die Dichte $I(\underline{X}, \underline{k}(\underline{X}, T), T)$ lokal ändert, durch den Fluss dieser Dichte bestimmt wird.

$$\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\langle E \rangle}{\sigma} \right) + \frac{\partial}{\partial \underline{X}} \left(\frac{\langle E \rangle}{\sigma} \right) \dot{\underline{X}} + \frac{\partial}{\partial \underline{k}} \left(\frac{\langle E \rangle}{\sigma} \right) \dot{\underline{k}} = \sum_i Q_i \quad (6.4)$$

Der Ortsvektor \underline{X} und der Wellenzahl-Vektor \underline{k} sind auf der Basis sphärischer Koordinaten $\underline{X} = (\lambda, \vartheta)$ und $\underline{k} = (|\underline{k}|, \theta)$ ($k_1 = k \sin\theta, k_2 = k \cos\theta$) parametrisiert worden. Für jede Seegangsmode wird die Zeitableitung der Vektoren (räumliche und spektrale Koordinaten) durch die Gruppengeschwindigkeit $\dot{\underline{X}} = \underline{c}_g = \nabla_{\underline{k}} \Omega$, $\dot{\underline{k}} = -\nabla_{\underline{X}} \Omega$ und die Dispersionsrelation linearer Wellen $\Omega = \sigma + \underline{k} \cdot \underline{v}_e$ festgelegt. Die mittlere Strömung an der Meeresoberfläche wird als Doppler-Verschiebung der intrinsischen Frequenz $\sigma(\underline{k}(\underline{X}, T), h(\underline{X}, T))$ in der Dispersionsrelation berücksichtigt (Strömungsrefraktion). Neben der Tiefenabhängigkeit der intrinsischen Frequenz (Tiefenrefraktion) ist die Refraktion der Wellen aufgrund von Strömung die zweite Schnittstelle, an der eine Rückkopplung des Zirkulationsmodells an das Wellenmodell geschieht. Propagation und Refraktion beeinflussen die räumlichen

und spektralen Wirkungsflüsse und führen ihrerseits durch Umverteilen der Seegangenergie zu einem veränderten Strömungsantrieb via Radiationstress-Divergenz. In dieser Arbeit wird eine vertikal über die gesamte Wassersäule integrierte Formulierung des Radiationstress-Tensors verwendet. Der Effekt variabler Refraktion aufgrund unterschiedlicher Strömungsgeschwindigkeiten \underline{v}_e in den verschiedenen Schichttiefen wird nicht betrachtet.

Beginnend mit dem Paper von Hasselmann [Has61] haben verschiedene Autoren die nichtlineare Wechselwirkung freier Seegangsmoden $\sum_i S_i = 0$ untersucht. Üblicherweise wird dieser Prozess durch eine Multipolentwicklung der Wechselwirkungs-Hamiltonfunktion bis zur niedrigsten nichtlinearen Ordnung parametrisiert. Die Beschränkung auf resonante Quadrupol-Wechselwirkung linearer Seegangsmoden führt zu einem Source-Term, der gleich dem Spektral-Integral über alle möglichen Quadruplet-Beiträge ist. Wie von Schneggenburger [Sch98] festgestellt worden ist, sind die räumlichen und zeitlichen Skalen, auf denen Refraktion das Seegangsspektrum strukturiert, im küstennahem Raum viel zu klein, als dass nichtlinearer Energietransfer die Entwicklung des Spektrum signifikant beeinflussen könnte. Deshalb wird der Beitrag nichtlinearer Wechselwirkung zur Dynamik linearer Seegangsmoden im k -Modell vernachlässigt und ein nichtlinearer Dissipations-Sourceterm eingeführt (Kapitel 6.2.1).

Das k -Modell verwendet die gleiche räumliche Diskretisierung wie das Zirkulationsmodell *BSHcmod*. Für beide Modelle ist das zwei-dimensionale Oberflächenraster (Abbildung [6.1]) identisch. Auf ein Nordost Atlantik-Modell für Seegang wurde verzichtet. Damit ist ausgeschlossen, dass Wellen von Außerhalb in das Nord/Ostsee-Gebiet hinein propagieren können. Umgekehrt ist es möglich, dass Wellen, die auf den Rand zulaufen, das Gebiet verlassen. Dazu wurden Neumannsche Randbedingungen auf den Gebietsgrenzen des Nord/Ostsee- und Küsten-Rasters implementiert. Für den operationellen Betrieb des gekoppelten Modells werden Randwerte des *DWD-Wellenmodells* (Deutscher Wetterdienst) an den Grenzen des Nord/Ostsee-Gebietes eingespeist.

An jedem Raumpunkt des k -Modells ist ein Spektralraum angehängt, dessen Diskretisierung 12 Richtungen und 28 Spektralwerte pro Richtung umfasst. Damit ist die Anzahl der Zellen im zwei-dimensionalen Seegangmodell um etwa den Faktor 84 (1 *nm* Küstenmodell, [Abb. 6.1] rot) und 44 (6 *nm* Nord/Ostsee Modell [Abb. 6.1] blau) größer als die entsprechende Anzahl im dreidimensionalen Raster des Zirkulationsmodells. Aus diesem Grund ist die benötigte Rechenzeit für einen Zeitschritt ΔT (Tabelle 6.1) im k -Modell um etwa den Faktor 23 größer als im Zirkulationsmodell *BSHcmod*.

Das k -Modell ist ein speziell für den Einsatz im küstennahen Raum mit stark gezeitenbeeinflussten Strömungen und Wassertiefen konstruiertes Wellenmodell und wurde an die dort herrschenden Bedingungen angepasst. Die Source-Funktionen bilden drei Gruppen: Energieinput aufgrund von Wind Q_{in} und Q_{phil} , lineare Dissipationseffekte aufgrund der Wechselwirkung von Seegang mit Oberflächen- und Bodenprozessen Q_{wcap} , Q_{bot} und nichtlineare Dissipation Q_{dis} .

$$\sum_i Q_i = Q_{in} + Q_{phil} + Q_{dis} + Q_{bot} + Q_{wcap} \quad (6.5)$$

Die Parametrisierung der Source-Funktionen hängt von modifizierbaren Konstanten ab. Diese müssen speziell auf das Einsatzgebiet des k -Modells abgestimmt werden. In küstennahen Gewässern, wo der Fetch begrenzt ist und die Tiefen- bzw. Strömungsfelder sich ständig ändern können, werden andere Konstanten verwendet als auf der offenen See. Im Rahmen dieser Arbeit wird eine Parametrisierung der Source-Funktionen verwendet, die für den Einsatz des k -Modells in der gesamten Nordsee geeignet ist (Tab. 6.2, links). Ein kurzer Überblick über die Source-Funktionen erfolgt in Kapitel (6.2.1). Für eine verbesserte Prognose in den Küstengebieten wäre es notwendig das k -Modell um ein genestetes Teilraster zu erweitern, das diesen Bereich abdeckt. Dort würden speziell kalibrierte Konstanten gelten (Tab. 6.2, rechts). Die Entwicklung des gekoppelten Modells für Seegang und Strömung ist aber noch nicht so weit vorangeschritten. Das Gesamtgebiet wird zwar in Nord/Ostsee- und Küstenraster untergliedert, deckt aber mit dem feinen Gitter noch immer zu große Areale der Nordsee ab.

6.2.1 k -Model Source-Funktionen

1. Atmosphärischer Input

Für ein langsam veränderliches Windfeld kann in guter Näherung die lineare Theorie von J. W. Miles [Mil57] ($Q_{in} \sim I$) zur Beschreibung des Wellenwachstums von Windsee verwendet werden. Gemäß der Argumentation von Janssen in [Kom94] (Komen et al. (1994)) ist es möglich, für die eigentlich stochastisch variierende Reibungs-Geschwindigkeit des Windes u_* eine Gauß-Verteilung anzunehmen. In diesem Fall ist die mittlere Wachstumsrate der Wellen durch den Sourceterm (6.6) gegeben. Die Böigkeit des Windfeldes wird durch die Funktion G festgelegt.

$$\begin{aligned} Q_{in} &= \beta \sigma G I(\underline{k}) . \\ G &= \frac{\sigma_{u_*}}{\sqrt{2\pi} c_*} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2}\right) + \frac{1}{2} (u_*/c_* - 1) [1 - \text{Erf}(\alpha)] \end{aligned} \quad (6.6)$$

In Gleichung (6.6) werden die Abkürzungen $\alpha = (c_* - u_*)/\sigma_{u_*}$ und $c_* = \sigma/(28 k \cos(\theta_s - \theta_w))$ (Snyder 1981 [Sny81]) definiert sowie die Bezeichnung σ_{u_*} für die Standardabweichung des Windfeldes u_* eingeführt. Die Konstante β ist gleich $6 \cdot 10^{-4}$. $\text{Erf}(\alpha)$ ist die Errorfunktion und θ_w, θ_s kennzeichnen die Wind- bzw. Seegangsrichtung. Bei der Definition der Reibungsgeschwindigkeit $v_* \equiv \sqrt{C_D v_{10}^2}$ wird die windabhängige Parametrisierung von Wu [Wu82] verwendet. Die Windschubspannung hängt von der Geschwindigkeit des Windes in 10 m Höhe v_{10} und dem Koeffizienten C_D ab.

Der Phillips Input-Sourceterm (6.7) parametrisiert den Input von Windenergie in das Seegangsspektrum aufgrund von turbulenten atmosphärischen Druckfluktuationen oberhalb der Wasseroberfläche [Phl77]. Nur langwellige Moden mit Phasengeschwindigkeiten $c > v_{10}/1.5$ profitieren von diesem Input-Mechanismus. Die k -Modell Formulierung des Sourceterms enthält ein Filter der den Wellenzahlbereich beschränkt, in dem sich Seegang entwickeln kann. Der Tolman-Filter $\sim \exp(-[f/f_{PM}]^4)$ [Tol92] verhindert das Anwachsen von Seegangenergie in dem Spektralbereich mit Frequenzen kleiner als die Pierson-Moskowitz Frequenz f_{PM} [Pie64]. Ein weiterer Filter $\sim \exp(-f/f_{PM})$ wurde in (6.7) eingebaut um den Input von Windenergie mit zunehmender Frequenz der Moden schrittweise zu reduzieren. Die in Gleichung (6.7) verwendeten Bezeichnungen haben ihre übliche Bedeutung.

$$Q_{phil} = 2 \frac{80 \rho_a^2}{g^2 \rho_w^2} \frac{c_g}{\sigma} \frac{e^{-f/f_{PM}} e^{-(f/f_{PM})^4}}{[u_* \cos(\theta - \theta_w)]^{-4}} \quad (6.7)$$

2. Nichtlineare Dissipation

Das k -Modell vernachlässigt den Beitrag nichtlinearer Wechselwirkung der Seegangsmoden zur zeitlichen Entwicklung des Spektrums. Damit die spektrale Balance der k -Modell Sourceterme Q_i für voll entwickelten Seegang dennoch gewährleistet ist, wurde ein nichtlinearer Dissipations-Sourceterm $Q_{dis} \sim I^2$ in (6.5) eingeführt. Rosenthal [Ros89] entwickelte die Idee einer viskosen, oberflächennahen Schicht innerhalb der Energie und Impuls des Wellenfeldes zusätzlich zu den linearen Prozessen aus Kapitel 6.2.1(3.) dissipiert werden kann. Der folgende Sourceterm wurde in [Ros89] aus der zeitlich gemittelten Bewegungsgleichung, in der die residuale Stokesdrift den einzigen nicht-verschwindenden Beitrag liefert, hergeleitet.

$$Q_{dis} = -\gamma g k^4 \left(\coth(2kh_e) + \frac{kh_e}{\sinh^2(kh_e)} \right) I^2 \quad (6.8)$$

Der dimensionslose Koeffizient $\gamma(k)$ bestimmt den Betrag der pro Zeiteinheit dissipierten Energiemenge. Er ist eine Funktion von k und nimmt stetig mit dem Betrag des Wellenzahlvektors k zu. Der Wert von $\gamma(k)$ hängt von den Konstanten $\gamma_0 = 0.06775$, $p_1 = 4$, $p_2 = 1.2$ und $q = 8$ ab. Mehr zu diesem Thema ist in den Arbeiten von Schneggenburger [Sch97] und [Sch98] veröffentlicht worden.

3. Lineare Dissipation durch Boden- und Oberflächenprozesse

Die Beschreibung linearer Dissipationsprozesse an der Oberfläche beruht auf einer Parametrisierung der Schaumkronenbildung (engl. „whitecaps“) an den Wellkämmen. (Komen et al. (1994) [Kom94] Seite 144).

$$Q_{wcap} = -\gamma_{wcap} I \quad (6.9)$$

Im Falle eines flachen Gewässers bestimmen Sandaufwirbelungen, Bodenreibung und Bodenelastizität die Wechselwirkung des Seegangs mit dem Meeresgrund. Im k -Modell wird die Standardform des Sourceterms S_{bot} (6.10) verwendet.

$$Q_{bot} = -\Gamma k^2 \sigma^{-2} (1 - \tanh^2 kh_e) I \quad (6.10)$$

Der Koeffizient Γ hängt von dem verwendeten Modell für die Wechselwirkung der Wellen mit dem Boden ab. Im k -Modell wird Γ auf den konstanten Wert $\Gamma = 0.01 \text{ m}^2/\text{s}^3$ gesetzt.

6.3 Das Kopplungsschema beider Modelle:

In dieser Arbeit werden Simulationsergebnisse präsentiert, die auf zwei eng verkoppelten numerischen Modellen basieren, dem Zirkulationsmodell des *BSH* und dem k -Modell der *GKSS*. Beide Modelle rechnen nacheinander, jeweils um einen Kopplungs-Zeitschritt $\Delta T = 450 \text{ s}$ versetzt. Das Zirkulationsmodell prognostiziert an jedem Punkt des diskretisierten Ortsraumes die Geschwindigkeit u_e der mittleren Strömung und die Summe aus topographischer Tiefe H_z und Wasserstand ζ_z zum Zeitpunkt $T + \Delta T$. Im Anschluss wird das Wellenmodell als Subroutine des *BSHcmod* aufgerufen. Die aktuellen Strömungen $\underline{u}_e(z_0)$ und Meerestiefen $(H_z + \zeta_z)(z_0)$ werden zusammen mit der Geschwindigkeit des Windfeldes \underline{u}_{wind} dem k -Modell als Eingangsgrößen übergeben. An jedem Oberflächen-Punkt (\underline{x}, z_0) des Nord/Ostsee- und Küstenrasters (Abbildung [6.1]) berechnet das k -Modell die spektrale Verteilung der Wellenwirkung zum Zeitpunkt $T + \Delta T$. Nach dem Lösen der spektralen Transportgleichung für den gegenwärtigen Zeitschritt ΔT wird das Zirkulationsmodell erneut aufgerufen und rechnet den nächsten Zeitschritt mit dem aktuellen Beitrag des Seegang zur mittleren Strömung \underline{u}^w .

Beide Modelle besitzen eine unterschiedliche interne Zeitschrittsteuerung. (Für die Bedeutung der Variablen siehe Legende: Tabelle 6.1.) Während eines Kopplungs-Zeitschritts von $\Delta T = 450 \text{ s}$ rechnet das Zirkulationsmodell auf dem 6 nm Nord/Ostsee-Raster $N_{Adv/Kop} = 5$ Zeitschritte mit jeweils $\Delta T_{Adv} = 90 \text{ s}$. Im gleichen Zeitraum rechnet das Küsten-Modell auf dem 1 nm Raster die doppelte Anzahl von Zeitschritten mit $\Delta T_{Adv} = 45 \text{ s}$. Auf dem Nord/Ostsee-Raster besitzt das Wellenmodell (k -Modell) einen Propagations-Zeitschritt ΔT_{Pro} von 150 s . Dahingegen rechnet es in der Küsten-Region mit dem gleichen „Transport“-Zeitschritt wie das *BSHcmod* $\Delta T_{Pro} = \Delta T_{Adv}$. Der Zeitschritt für die Integration der Source-Funktionen ΔT_S ist im Nord/Ostsee-Wellenmodell gleich dem Kopplungs-Zeitschritt ΔT und im genesteten Küsten-Modell gleich $\Delta T/2 = 225 \text{ s}$.

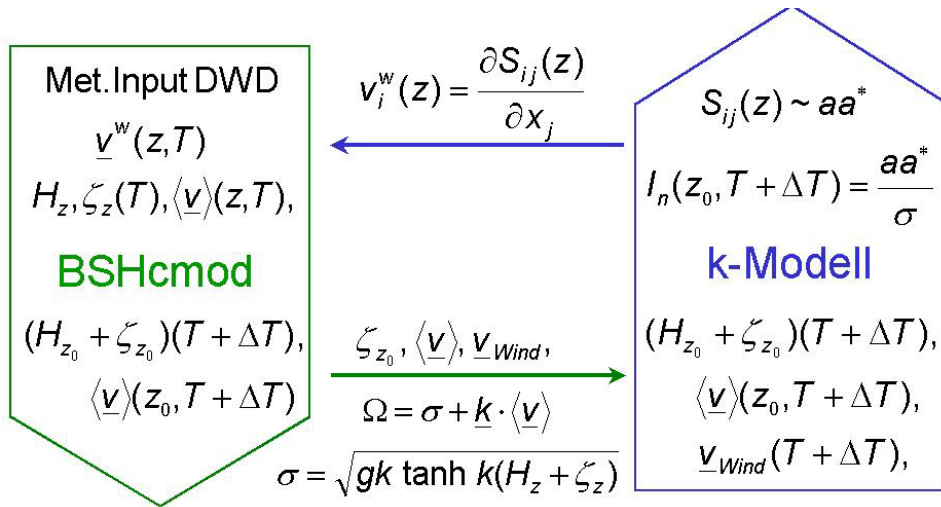


Abbildung 6.2: Schematischer Aufbau des gekoppeltem Modells bestehend aus dem Zirkulationsmodell: BSHcmod und dem Wellenmodell: k -Modell. Bezeichnungen: (\underline{x}, z) Kartesische Koordinaten; H_z topographische Tiefe, ζ_z Wasserstand, $\underline{U} = \underline{u}_e + \underline{u}^w$ mittlere Strömung und S_{ij} Tensorkomponente des Radiationstress in der z -ten Schicht; \underline{u}_{Wind} Windgeschwindigkeit; I_n Wellenwirkung, σ intrinsische Frequenz und a Seegangsamplitude der k_n -ten Mode.

Nord/Ostsee-Modell

ΔT	ΔT_{Adv}	$\Delta x, \Delta y$				
450.0 s	90.0 s	6 nm				
ΔT	ΔT_{Pro}	ΔT_S	$N_{Pro/Ref}$	KL	ML	$k_1 \leq k \leq k_{28}$
450.0 s	150.0 s	450.0 s	4	12	28	$0.01 \text{ m}^{-1} \leq k \leq 1.72 \text{ m}^{-1}$

Küsten-Modell (genestet)

ΔT	ΔT_{Adv}	$\Delta x, \Delta y$				
450.0 s	45.0 s	1 nm				
ΔT	ΔT_{Pro}	ΔT_S	$N_{Pro/Ref}$	KL	ML	$k_1 \leq k \leq k_{28}$
450.0 s	45.0 s	225.0 s	4	12	28	$0.01 \text{ m}^{-1} \leq k \leq 1.72 \text{ m}^{-1}$

Tabelle 6.1: ΔT Zeitraum nach dem Datenfelder zwischen den Modellen ausgetauscht werden; $\Delta \underline{x}$ räumliche Diskretisierung; ΔT_{Adv} Advektions-Zeitschritt (Zirkulation); ΔT_{Pro} Propagations-Zeitschritt (Seegang), $N_{Pro/Ref}$ Anzahl von Refraktions-Zeitschritten pro ΔT_{Pro} ; $N_{Adv/Kop}$ Anzahl der Advektions-Zeitschritte pro Aufruf des k -Modells; Spektrale Diskretisierung; KL Anzahl von Richtungen, ML Anzahl von Spektralwerten, abgedeckter Wellenzahlbereich $k_1 \leq k \leq k_{28}$.

	Offene See	Küstengewässer
Nichtlineare Dissipation	$\gamma_0 = 0.06775,$ $p_1 = 4,$ $p_2 = 1.2$ und $q = 8$	$\gamma_0 = 0.09485,$ $p_1 = 10,$ $p_2 = 1.6$ und $q = 6$
Snyder Input	$\beta = 0.0009$	$\beta = 0.0006$
Lineare Dissipation	$\Gamma = 0.01 \text{ m}^2/\text{s}^3$	$\Gamma = 0.038 \text{ m}^2/\text{s}^3$

Tabelle 6.2: Parameter des k -Modells nach Schneggenburger [Sch98] (Seite 61 für die Offene See und Seite 44 für die Küstengebiete). Das Modell kann für den Einsatz in den Küstengewässern (rechts) und der offenen See (links) kalibriert werden. Die Bedeutung der Größen ist in Kapitel 6.2.1 erklärt worden. Die Modellrechnungen aus Kapitel 7 und 8 wurden mit dem linken Parameter-Satz für die offene See durchgeführt.

Kapitel 7

Anwendung des gekoppelten Modells

Die ersten drei Kapitel 3 bis 5 dieser Arbeit beschäftigten sich mit der nicht-kanonischen und kanonischen Theorie von Oberflächenwellen. Es wurde ein allgemein für alle Hamiltonschen Systeme gültiger Ausdruck für den seegangsinduzierten Antrieb der mittleren Strömung hergeleitet und für zwei ausgesuchte, hydrodynamischen Beispiele, Kapitel 4.1 und 4.2, explizit ausgerechnet. In dem nun folgenden, anwendungsbezogenen Teil der Arbeit werden Ergebnisse numerischer Simulationen diskutiert. Die dabei verwendete Formulierung des Radiationstress-Tensors wurde in Kapitel 4.3 (Gleichung (4.77)) für ein inkompressibles Fluid auf einer Äquipotentialfläche des Gravitationsfeldes hergeleitet.

7.1 Einleitung

Es wurden Sturmflut-Szenarien als Anwendungsbeispiele des gekoppelten Seegangs-Strömungs Modells gerechnet, weil sie extreme Wetterlagen darstellen. Der Einfluss von Wellen auf die Dynamik der mittleren Strömung ist unter meteorologischen Verhältnissen, wie sie für eine Sturmflut typisch sind, besonders deutlich. Deshalb sind diese Situationen besonders dazu geeignet, die Differenzen zwischen den Ergebnissen der Simulationen mit dem vollständig gekoppelten Modell und den einzelnen Modellkomponenten darzustellen.

Operationelle ozeanographische Modelle können Sturmfluten mit großer Genauigkeit vorhersagen, wenn genaue meteorologische Antriebsdaten vorliegen [BSH01]. Der noch vorhandene Fehler lässt sich nur zum Teil durch Ungenauigkeiten bei der Parametrisierung der modellierten Prozesse erklären. Weitaus wichtiger ist es, alle wesentlichen Prozesse in das Vorhersagemodell zu integrieren. Seegang wurde bisher nicht als integraler Bestandteil des *BSH*-Zirkulationsmodells verstanden. Sein Beitrag kommt vor allem dort zum Tragen, wo die Wellen brechen oder anderweitig Seegangenergie dem Wellenfeld entzogen wird. Bei stetiger Verfeinerung der Modelle mit zunehmender Rechenleistung der Computersysteme wird es für eine adäquate Beschreibung der Hydrodynamik notwendig, diesen Effekt zu berücksichtigen. Es existieren Szenarien, bei denen der Seegangseinfluss nicht vernachlässigt werden kann. Bei einem kräftigen Wind mit auflandiger Komponente und entsprechender Orographie der Küstenregion kann es zu einer seegangsbedingten Wasserstandsänderung (wave setup) von bis zu einem Achtel der ursprünglichen Wellenhöhe über tiefem Wasser (Tiefe $h \gg$ Wellenlänge) führen [Ros84]. Besonders bei einer Sturmflut und den damit verbundenen hohen Wasserständen ist der wave setup spürbar. Die vor allem in Küstennähe auftretende Wasserstandserhöhung ist mit einer

balancierenden Strömung verbunden. Für einen auflandigen Wind mit senkrecht auf die Küste zulaufenden Wellen, ist der wave setup maximal. Die in den Wellen gespeicherte Energie wird während des Brechvorgangs teilweise umgewandelt. Es entstehen Küstenlängs- und Ripströmungen. Letztere können durch das gekoppelte Modell nicht aufgelöst werden, da sie lokal gebündelt auftreten. Der Einfluss von Seegang auf die Dynamik des Wasserkörpers ist nicht nur auf die Brandungszone begrenzt. Wo immer die spektrale Energieverteilung der Wellen sich zwischen zwei benachbarten Raumpunkten ändert, wird eine seegangsabhängige Strömung induziert. Der mit dieser Strömung verbundene Transport von Sediment und Schwebstoff ist von großer Bedeutung für die Gestaltung des Küstenraumes. Beide Effekte, wave setup und Brandungsströmung, können nur durch eine geeignete Seegangsvorhersage prognostiziert werden.

Die qualitativen Eigenschaften und die Ausprägung einer Sturmflut hängen entscheidend von der vorherrschenden Wetterlage und deren Entstehungsgeschichte ab. Daher werden die Sturmfluten nach dem vorliegenden Wassertyp unterschieden. Die Wetterlage von 16./17. Februar 1962 war typisch für eine Sturmflut vom Windstau-Typ [Hew80]. Solche Sturmfluten werden von ausgedehnten kalten und hochreichenden Tiefs verursacht. Aufgrund der geringen Zuggeschwindigkeit des Tiefs sind die Stürme von langer Dauer und können bei Windrichtungen von Nordwest zu erheblichen Aufstauungen in der Deutschen Bucht führen. Die Sturmflut des Jahres 1999 war vom zirkularen Typ. Bei solchen Sturmfluten ist die Wetterlage durch kleinräumige, warme Tiefs gekennzeichnet, die mit großer Geschwindigkeit als Zyklon über die zentrale Nordsee ziehen. Bei einem solchen Sturm-Tief treten starke Druckgradienten auf, die zu extremen Windgeschwindigkeiten führen. Im Meer führt die dadurch bedingte Zirkulation zu einem starken Anstau an der Küste und zu einem Absenken des Wasserspiegels im Inneren des Wirbels.

Im Anschluss an die Einleitung werden für beide Sturmflut-Typen Modellrechnungen präsentiert. Das Kapitel untergliedert sich in die zwei Themen-Schwerpunkte: Anwendung des gekoppelten Modells auf ausgewählte Sturmflut-Szenarien und Vergleich der Hindcast-Rechnungen mit Messwerten. In Kapitel 7.2 wird die Sturmflut vom 16./17. Februar 1962 untersucht. Es liegen Beobachtungswerte von den Feuerschiffen vor, die mit den modellierten Werten für die Wellenhöhe verglichen werden können. Eine Gegenüberstellung mit Messwerten ist nur für den Wasserstand möglich. Soweit mir bekannt ist, erfolgt in dieser Arbeit zum ersten Mal ein Hindcast des Seegangs während der Sturmflut vom Februar 1962. In Kapitel 7.3 werden die Ergebnisse von Modellrechnungen mit gemessenen Werten für Wasserstand, Strömung und Wellenhöhe verglichen. Als Szenarios wurden die Sturmflut von 1999 und eine Sturmperiode des Jahres 2003 ausgewählt.

7.2 Sturmflut von 1962

Die in ihren Auswirkungen verheerendste Naturkatastrophe, die Hamburg im letzten Jahrhundert heimgesucht hat, war der Hamburg-Orkan vom 16./17. Februar 1962 und die von ihm verursachte Sturmflut. In der zweiten Februar-Dekade 1962 kam es über der Nordsee zu zwei schweren Winterstürmen. Mit Stundenmittelwerten von etwa 28 m/s Windgeschwindigkeit über der Deutschen Bucht und Böen bis zu 44 m/s hatte das zweite Sturmereignis seinen Höhepunkt am 16. Februar abends und verursachte die bekannte Katastrophenflut. Bei derartigen Windverhältnissen ist nach empirisch-statistischen Verfahren mit einer Wasserstandserhöhung von mehr als 3.5 m in der inneren Deutschen Bucht zu rechnen [Mue03]. Die beträchtlichen Sachschäden und die große Zahl an Todesopfern führten zu einer intensiven Untersuchung der Umstände dieses Ereignisses [Hen64]. Es gibt eine Fülle von Literatur zu diesem Thema. Die Entstehungsgeschichte der Sturmflut wurde von Rodewald [Rod62] aus meteorologischer Sicht und von Koopmann [Kop62a], [Kop62b] sowie Hewer [Hew80] aus ozeanographischer Sicht untersucht.

Schon kurz nach dem Hamburg-Orkan gab es eine Reihe von Ansätzen für eine computergestützte Untersuchungen des Sturmflutverlaufs [Han66], [Hea69]. Dabei wurden vertikal integrierte Modelle verwendet, die trotz ihrer geringen räumlichen und zeitlichen Auflösung ($\Delta x \approx 37 \text{ nm}$, $\Delta T \approx 5$ Minuten) den Verlauf der gemessenen Pegelkurven gut wiedergeben konnten [Mue06]. Eine detaillierte Analyse der Sturmflut erfolgte im Rahmen des *MUSE*-Projektes [Jen05] (Modellgestützte Untersuchungen zu Sturmfluten mit sehr geringen Eintrittswahrscheinlichkeiten.) unter Verwendung des *BSH*-Zirkulationsmodells (Kapitel 6). Seegangseffekte, die bei einem Sturmereignis zu erheblichen Wasserstandserhöhungen in Küstennähe führen können, wurden nur über den Windschubkoeffizienten abgeschätzt. Sie sind explizit nicht berechnet worden. Welche welleninduzierten Differenzen für Wasserstand und Strömung noch additiv zu den ermittelten Maximalwerten des Zirkulationsmodells hinzu gerechnet werden müssen, lässt sich aus den Ergebnissen eines separat betriebenen Wellenmodells nicht ableiten. In dieser Arbeit werden Simulationsergebnisse des gekoppelten Modells präsentiert. Das Untersuchungsgebiet umfasst die gesamte Nordsee mit einem Fokus auf die Deutsche Bucht. Es wird der Zeitraum 16. bis 18. Februar 1962 unter Verwendung speziell vom *DWD* für das *MUSE*-Projekt generierter meteorologische Antriebsdaten analysiert. Die Wetterdaten sind Simulationsergebnisse des *DWD* Lokalmodells *LM* für den mitteleuropäischen Raum. Für das lokale, genestete *LM* Modell wurden Randwerte mit dem Globalen Atmosphärenmodell *GME* berechnet. Die Startkonfiguration der Modellparameter besteht aus Re-Analyse Daten des Europäischen Zentrums für mittelfristige Wettervorhersage (*EZMW*).

Das Ergebnis sind Strömungsdifferenzen von etwa 20 cm/s bis 60 cm/s [Abb. 7.4] zwischen dem Zirkulationsmodell und dem vollständig gekoppelten Modell. In den flachen Bereichen der Nord- und Ostfriesischen Küste treten Wasserstandsdifferenzen von etwa 20 cm bis 50 cm [Abb. 7.2] und darüber auf. Ein Vergleich der numerisch modellierten Seegangsverhältnisse mit Beobachtungsdaten ist nur eingeschränkt möglich, da verlässliche Messreihen nicht vorliegen. Über den simulierten Zeitraum hinweg waren in der deutschen Bucht mehrere Feuerschiffe stationiert, deren Besatzungen mittlere Seegangparameter wie Wellenhöhe und Propagationsrichtung als stündlich Schätzwerte ermittelten. Ein Vergleich dieser Daten mit Simulationsergebnissen ergibt eine gute Übereinstimmung an den weniger exponierten Messpositionen und eine Unterschätzung der Wellenhöhe an den anderen Messpunkten. Weitere Vergleichsdaten sind die gemessenen Pegel-Wasserstände entlang der deutschen Küste. Die gemessenen Ergebnisse werden durch das Zirkulationsmodell recht gut wiedergegeben.

7.2.1 Simulationsergebnisse

In diesem Kapitel erfolgt eine ausführliche Darstellung der Simulationsergebnisse zum Zeitpunkt des maximalen Hochwassers in Cuxhaven (16. Februar 1962, 21.00 Uhr UTC¹). Es werden drei Fälle von numerischen Simulationen für eine Analyse des Seegangseinflusses auf die zeitliche Entwicklung der mittleren Strömung und vice versa untersucht. Die ersten beiden Fälle sind Vergleichsrechnungen für eine Gegenüberstellung der Ergebnisse des gekoppelten Modells mit den Resultaten der Einzelmodelle. Im ersten Fall wird das Wellenmodell abgeschaltet und das Zirkulationsmodell ohne zusätzlichen Seegangantrieb betrieben. Im zweiten Fall wird das gekoppelte Modell gestartet, aber nur der mittlere Wasserstand (Orographie) und eine Strömung vom Betrage Null an das Wellenmodell übergeben. Diese Rechnung entspricht einem Lauf eines ungekoppelten Wellenmodells ohne dynamisierte Umgebungsvariablen wie mittlere Strömung und Wassertiefe. Im Fall Nummer drei wird der Einfluss von Seegang auf die mittlere Strömung und der Effekt variabler Tiefen und Strömungsfelder auf den Seegang modelliert. Refraktion und Propagation der Wellen führen vor allem in Küstennähe

¹In dieser Arbeit werden alle Zeiten in UTC (Coordinated Universal Time) angegeben.

zu einem deutlichen Beitrag der Radiationstress-Divergenz zur mittleren Strömung. Es gehen die gleichen Windfelder in alle Modelle ein. Der Schwerpunkt dieses Kapitels liegt auf der Darstellung seegangbedingter Wasserstandserhöhungen und Strömungsdifferenzen in der Deutschen Bucht.

Die Abbildung [7.1a] zeigt eine Windsituation, wie sie für eine Sturmflut vom Windstau-Typ charakteristisch ist. Ein ausgedehntes Sturmtief sorgt für eine großflächig hohe Windgeschwindigkeit von über 24 m/s in einem Gebiet, das von der Nordfriesischen Küste in Richtung Nordwest bis zur Nordenglischen Küste und im Norden darüber hinaus reicht. Ein breiter Strom kalter Polarluft, von vielen Schauern und Böen durchsetzt, zieht über das Nordmeer und die Nordsee bis hin zu dem Trichter der Deutschen Bucht. Der Sturm besitzt nur relativ geringe Druckgradienten, was die Geschwindigkeit des Windes begrenzt. Bei der geringen Zuggeschwindigkeit des Tiefs war der Sturm allerdings recht lang anhaltend und die Wasserstandserhöhung an der Küste auch entsprechend nachhaltig und stark. Nach Rodewald [Rod62] betrug die Luftdruckdifferenz zwischen Südwestengland (1030 mb) und Schweden (960 mb) zum Höhepunkt des Sturmes (16. Februar 1962 22:00 Uhr) nur etwa $70 \text{ Milli-bar (mb)}$. Der größte Druckgradient wurde zwischen den Isobaren von 980 mb und 995 mb gemessen. Zum betrachteten Zeitpunkt überstrich die zwischen diesen beiden Werten gelegene Isobaren-Schar einen Großteil der Deutschen Bucht (Gebiet zwischen Außenweser und Südwestjütland). In dieser Gefällszone sorgte der Hamburg-Orkan für Windrichtungen von Westnordwest bis Nordwest auf der offenen See (mit 10-11 Beaufort). Unter diesen ungünstigen Bedingungen erzeugt auch ein lokal nicht extrem starker Wind einen erheblichen Stau in der Deutschen Bucht.

Die Struktur des Seegangfeldes [Abb. 7.1b] zeichnet im Wesentlichen die Struktur des Windfeldes [Abb. 7.1a] nach. Langanhaltende Winde sorgen für entsprechend gut entwickelten Seegang mit Wellenhöhen von bis zu 10 m in den tieferen Bereichen der Deutschen Bucht und noch etwa 6 m bis 7 m , stellenweise bis zu 8 m , an der Küste. Der Wind kam aus West bis Nordwest und besaß große

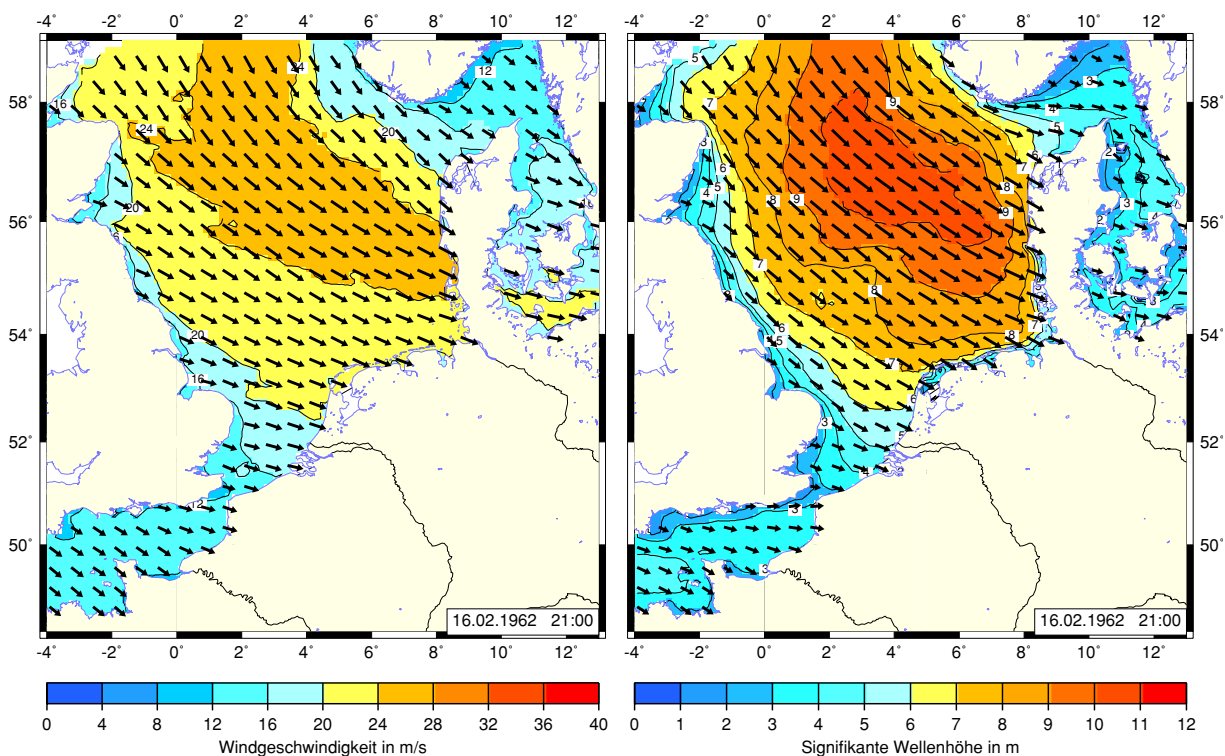


Abbildung 7.1: Windgeschwindigkeit (links) und signifikante Wellenhöhe (rechts) in der Nordsee zum Zeitpunkt 21:00 Uhr UTC am 16.02.1962. Die Wellenhöhe H_s (rechts) wurde mit gekoppelten Modell für Seegang und Strömung berechnet. Das Maximum der Windgeschwindigkeit und der Wellenhöhe wurde, mit Werten von 27.5 m/s und 10 m , in den tieferen Regionen der deutschen Bucht bestimmt.

Windstärken an der Dänischen und Nordfriesischen Küste. Deshalb werden besonders deutliche Seegangseffekte an der Dänisch-Friesischen Küste zu beobachten sein. Der Brandungsstau auflaufender Wellen führt zu erheblichen Wasserstandserhöhungen [Abb. 7.2b] in den flachen Küstenregionen. Eine Sturmflut vom Windstau Typ kennzeichnet die „klassische“ Situation, dass Wasser durch einen Wind aus nordwestlicher Richtung in die Deutsche Bucht transportiert wird. Charakteristisch ist vor allem die große Windstreichlänge der mittlerer Strömung und des Seegangs beim Aufbau der Sturmflut. Die Abbildung [7.2a] zeigt eine Flächendarstellung des Wasserstandes in der Deutschen Bucht zum Zeitpunkt des Hochwassers in Cuxhaven. Um diese Uhrzeit (21:00 Uhr, 16.12.1962) hat der Sturm noch nicht seinen Höhepunkt erreicht, dies ist etwa eine Stunde später der Fall, und das Nordsee-Wasser wird noch immer an der Küste aufgestaut. Der in Windrichtung geöffnete Trichter der Deutschen Bucht bietet ideale Stau-Bedingungen und führt zu einer graduellen Wasserstandserhöhung von etwa 1 m auf offener See bis zu über 5 m in der Elbmündung. Obwohl die modellierte Wellenhöhe mit Werten unterhalb von 3 m im Wattenmeer verglichen mit den Werten, 7 m bis 8 m, vor den Inseln gering ist [Abb. 7.6a], wird gerade dort die größte seegangsinduzierte Wasserstandserhöhung beobachtet. Der Brandungsstau seewärts der Inseln setzt sich in die flachen Wattgebiete fort und führt dort zu einer signifikanten Wasserstandserhöhung von 0.6 m bis über 1.0 m. Es ist überraschend, dass gerade bei Esbjerg und der Lee-Seite von Sylt die größte Wasserstandserhöhung

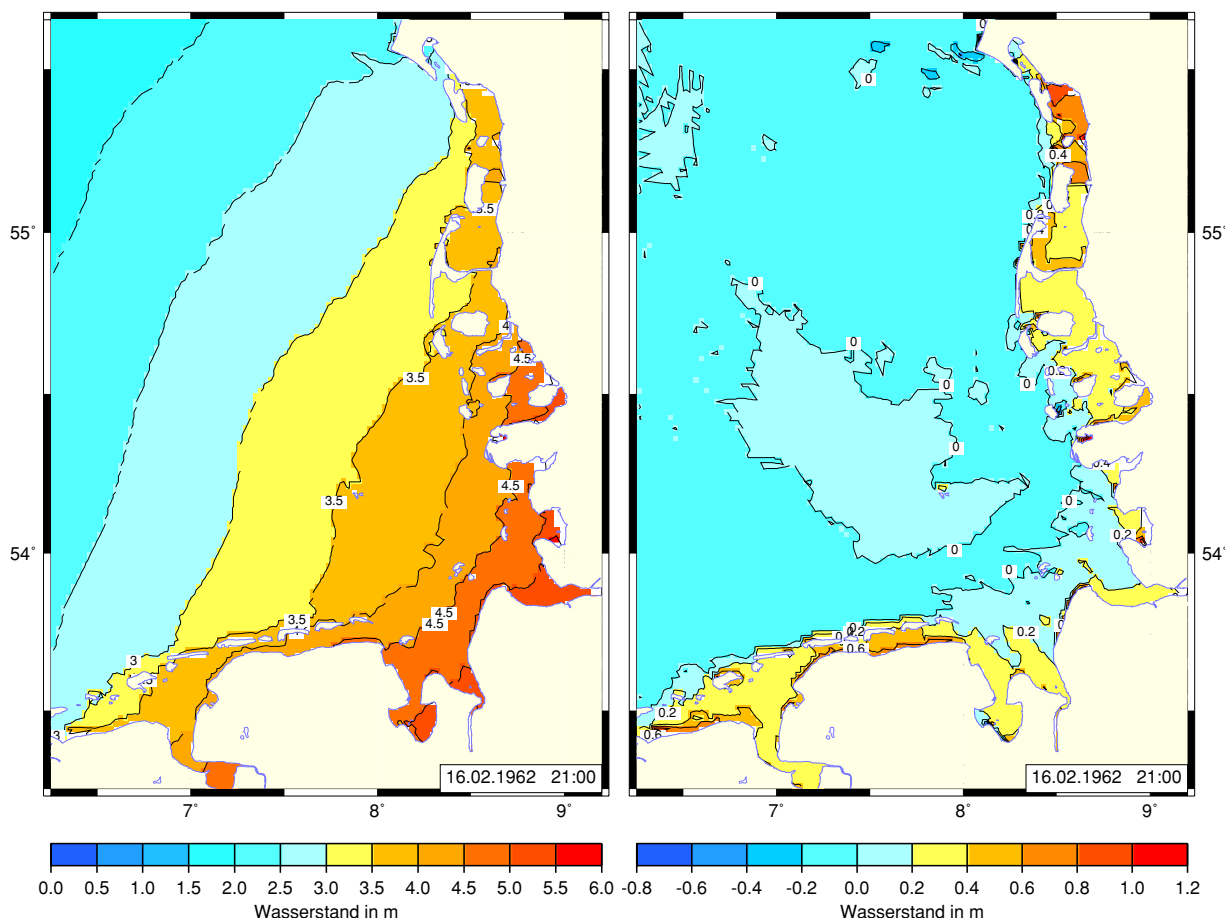


Abbildung 7.2: Links: Räumliche Verteilung des Wasserstandes in der Deutschen Bucht zum Zeitpunkt 21.00 Uhr UTC am 16.02.1962. Rechts: Vergleich des vollständig gekoppelten Modells (links) mit dem Zirkulationsmodell zum gleichen Zeitpunkt. (gekoppeltes Modell minus Zirkulationsmodell) Der Maximalwert des Wasserstandes wurde mit etwa 6 m in der Dithmarscher Bucht lokalisiert und die größte Differenz beider Modelle mit 1.5 m in der Nähe von Esbjerg bestimmt.

auftritt. Das Bild der dargestellten Wasserstandsunterschiede zwischen dem gekoppelten Modell und dem Zirkulationsmodell zeigt aber einen zeitintegrierten Seegangseffekt. Über einen längeren Zeitraum hinweg können die seegangsbedingten Massenflüsse zu einer regional sehr unterschiedlichen Erhöhung des Wasserstandes führen. Durch die lokalen Seegangsverhältnisse ist diese Erhöhung nicht zu erklären.

Das Modell ist nicht gut genug aufgelöst, um kleinräumige Effekte mit ausreichender Genauigkeit darzustellen. An einigen singulären Punkten treten direkt an den Küstenlinien, wie zum Beispiel der Seeseite von Sylt, Wasserstandsunterschiede auf, die so sicherlich nicht beobachtet werden. Der Fehler entsteht durch die numerische Behandlung des Problems und wurde bisher nicht weiter untersucht.

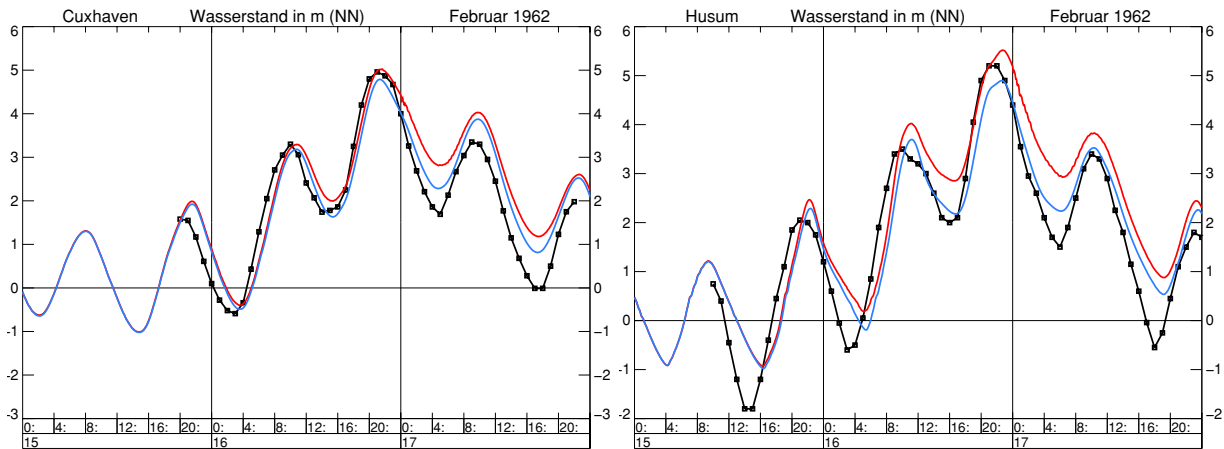


Abbildung 7.3: Vergleich der Pegelkurven (schwarz) von Cuxhaven und Husum mit den modellierten Wasserständen: BSH-Zirkulationsmodell (blau), Gekoppeltes Modell für Seegang und Strömung (rot) für den Zeitraum 15.02.1962 00:00 Uhr UTC bis 17.02.1962 24:00 Uhr UTC in Cuxhaven (links) und Husum (rechts).

Ein Vergleich der modellierten Wasserstände [Abb. 7.3 a,b] mit den Pegelkurven an den Stationen Cuxhaven und Husum zeigt, dass beide Modelle die Hochwasser relativ gut wiedergeben, die Niedrigwasser aber generell überbewerten. Die Werte des gekoppelten Modells für Seegang und Strömung liegen an beiden Messpositionen systematisch über den Wasserständen des ungekoppelten Zirkulationsmodells. Diese Abweichung kann darauf zurückgeführt werden, dass in beiden Teilmodellen eine separat optimierte Parametrisierung der Windschubspannung verwendet wurde. Im Zirkulationsmodell ist es der empirische Ansatz von Smith und Banke (1975) [SB75] und im k -Modell die von der Windgeschwindigkeit abhängige Parametrisierung von Wu (1982) [Wu82]. Diese Ansätze für den Windschubspannungs-Koeffizienten enthalten bereits implizit einen Teil des Wellenbeitrags. Die Kopplung des Zirkulationsmodells mit dem Seegangsmodell führt deshalb zu einer Überbewertung des Welleneinfluss auf die mittlere Strömung.

Da die Pegel-Orte an der Küste liegen, ist der Beitrag des Brandungsstaus zu den Wasserständen besonders deutlich. Zum Zeitpunkt des Hochwassers in Cuxhaven reproduziert das gekoppelte Modell die gemessenen Wasserstände etwas besser als das Zirkulationsmodell. Die Differenz ist nicht unerheblich und beträgt etwa 20 cm. Über den ganzen Zeitraum betrachtet sind die modellierten Wasserstände von beiden Modellen zu hoch. Um zu zeigen, dass Seegang gerade in flachen Gebieten einen deutlichen Beitrag zu dem Anstau an der Küste liefert, wurde als zweite Messstation Husum [Abb. 7.3b] ausgewählt. Im Wattenmeer ist die Differenz der modellierten Wasserstände [Abb. 7.2b] höher als an anderen Pegel-Orten. Eine Gegenüberstellung der Modellwerte [Abb. 7.3a,b] (rote und blaue Linie) zeigt in Husum eine deutlich größere Abweichungen der Ergebnisse als in Cuxhaven.

Das Strömungsfeld [Abb. 7.4a] zeigt auflaufendes Wasser kurz vor dem Erreichen des maximalen Wasserstandes in der Deutschen Bucht. Zum dargestellten Zeitpunkt 16.02.1962, 21:00 Uhr befindet sich der Sturm kurz vor seinem Höhepunkt. Die aufgestaute Wassermasse erzeugt eine balancierende

Gegenströmung welche den Massentransport in die Deutsche Bucht hinein reduziert. Die Geschwindigkeit [Abb. 7.4a], mit der Nordseewasser an den Nord- und Ostfriesischen Inseln vorbei in die Deutsche Bucht einströmt, verringert sich von über 1.2 m/s um 18:00 Uhr zu etwa 0.6 m/s bis 0.8 m/s um 21:00 Uhr. Außerhalb des flachen Gebietes von Horns Rev und der Priele zwischen den Inseln des Wattenmeeres ist die modellierte Strömungsgeschwindigkeit kleiner als 0.8 m/s . Die flächenhafte Darstellung [Abb. 7.4a] der mittleren Strömung ist uneinheitlich und die Struktur des Geschwindigkeitsfeldes im Wesentlichen von der komplexen Topographie in der Deutschen Bucht bestimmt. Da zum betrachteten Zeitpunkt 21:00 Uhr die Strömung $\langle \underline{v} \rangle = \underline{v}_e + \underline{v}_{sd}$ relativ klein ist, bei gleichzeitig großen Wellenhöhen, ist der seegangsinduzierte Strömungsbeitrag relativ groß und alle Eigenschaften der Radiationstress-Divergenz prägen sich dem Strömungsfeld auf. In den Wattgebieten und den flachen Bereichen um Helgoland, Horns Rev und Amrun Bank erzeugt der Seegang einen besonders deutlichen Beitrag zur mittleren Strömung. Die Abbildungen [7.4b] und [7.5] zeigen Betragsdifferenzen der Strömungsgeschwindigkeit von bis zu 0.6 m/s zwischen dem Zirkulationsmodell und dem gekoppelten Modell.

In Abbildungen [7.4b] sind die Differenzen der Strömungsrichtung zwischen den beiden Modellen dargestellt. Eine deutliche Änderung der Richtung ist dort erkennbar, wo der Betrag der Geschwindigkeit gering ist. Diese Gebiete sind durch große Tiefengradienten und beträchtliche Wellenhöhen während des Sturmereignisses gekennzeichnet. Der seegangsinduzierte Massentransport ist auch in dargestellt.

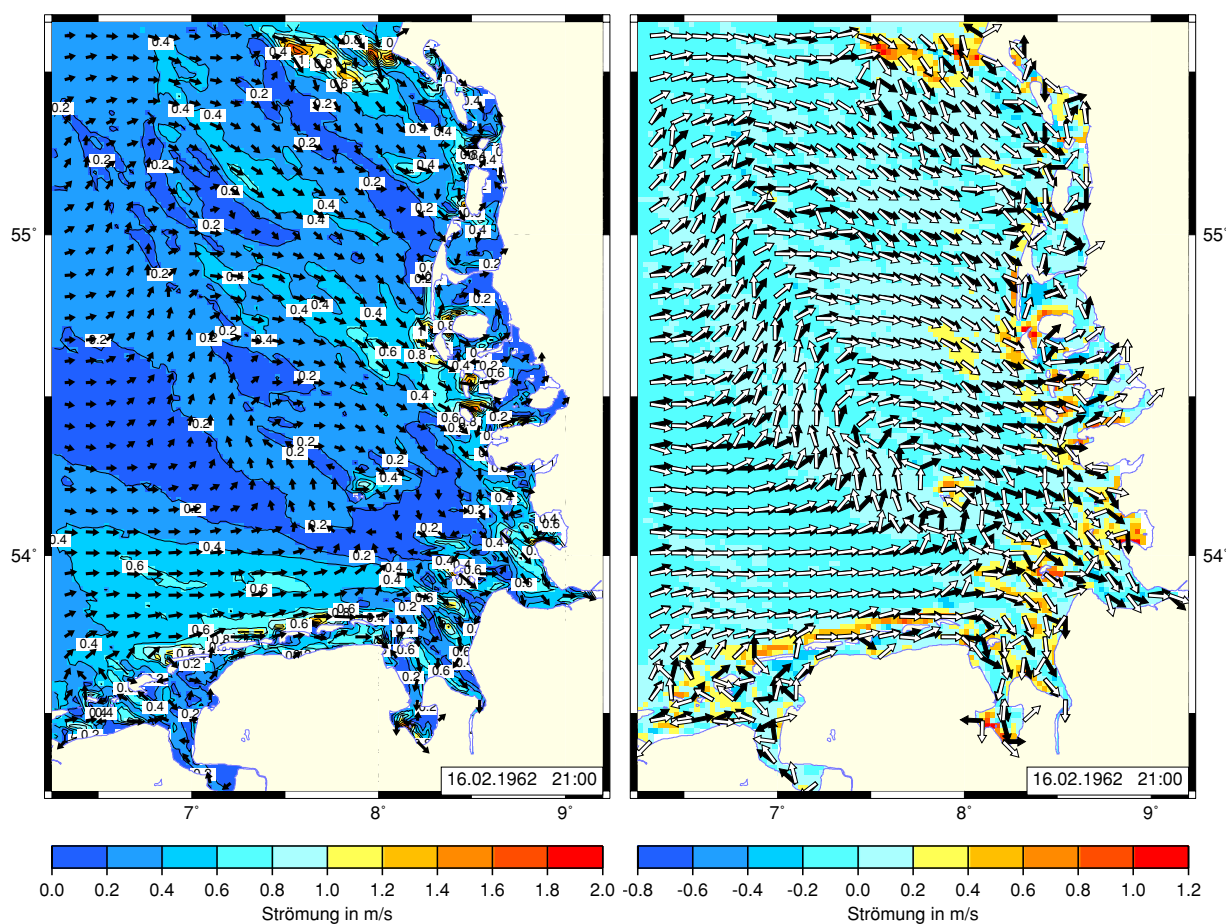


Abbildung 7.4: Strömungsgeschwindigkeit (links), Maximalwert 1.9 m/s , und Differenz der Geschwindigkeiten (rechts) (gekoppeltes Modell minus Zirkulationsmodell), Maximalwert 1.7 m/s , in der Nordsee zum Zeitpunkt 21.00 Uhr UTC am 16.02.1962. Die Betragsdifferenz der Vektoren ist als Farbwert dargestellt. Die weißen Pfeile kennzeichnen die Strömungsrichtung im gekoppelten Modell (links) und die schwarzen Pfeile die Richtung im Zirkulationsmodell.

ten Wasserständen, Abbildung [7.2b], sichtbar. Ein Merkmal des Differenzbildes ist der großflächig erhöhte Wasserstand, von $+0.0\text{ m}$ bis $+0.2\text{ m}$, in der zentralen Deutschen Bucht. Besonders interessant sind die Seegangseffekte in der unmittelbaren Nähe der Küste. Bei Wind aus Nordwestlicher Richtung kommt es entlang der nord- und ostfriesischen Küste zu einer Verstärkung der küstenparallelen Strömungskomponente. Die geometrische Bedingung für eine maximale Küstenlängsströmung in der Brandungszone sind schräg einlaufende Wellen mit einer Winkeldifferenz von etwa 45° zwischen Küstenlinie und Propagationsrichtung. Begünstigt durch die Wind- und Seegangsrichtung aus Nordwest ist der Brandungsstrom besonders an der Südflanke von Sylt, den Inseln Amrum und

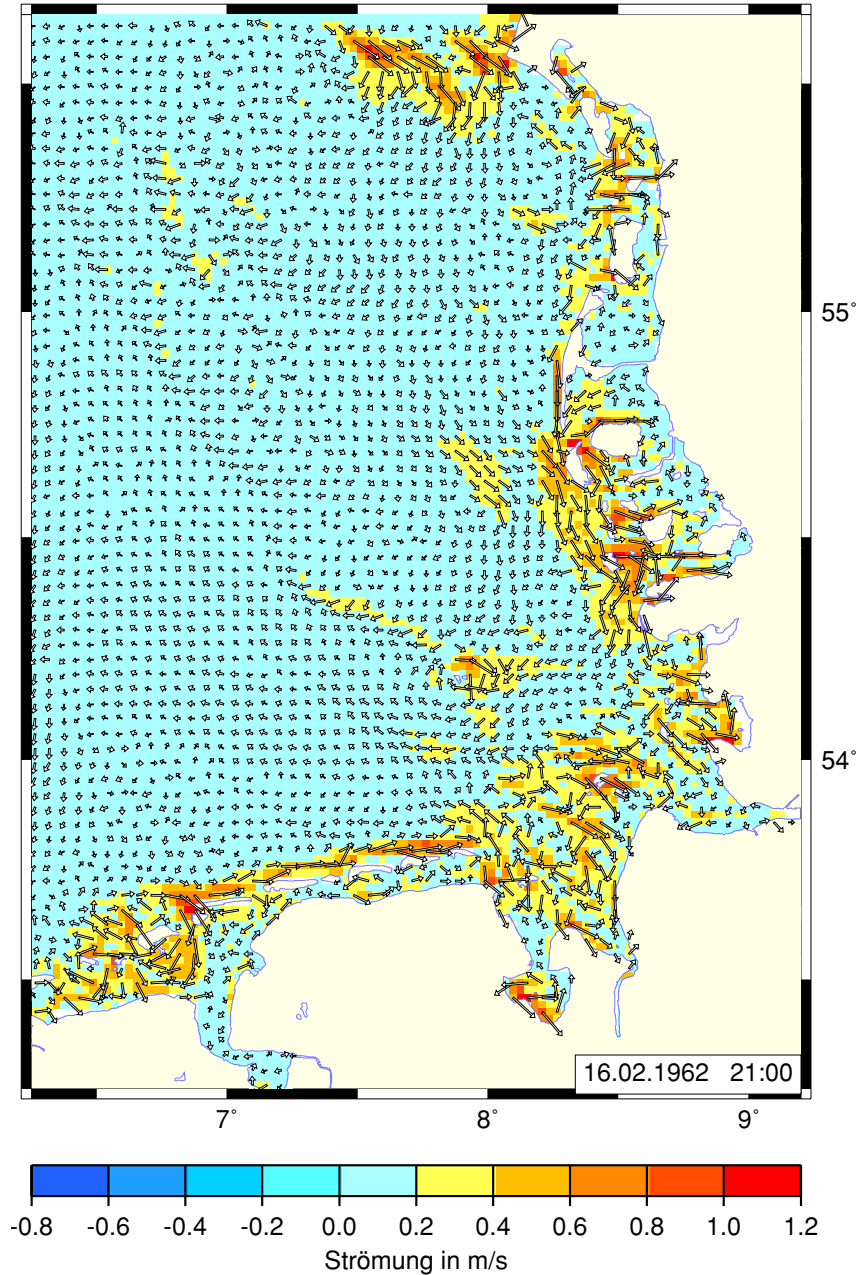


Abbildung 7.5: Farbdarstellung: Betrag des Differenz-Vektors der Geschwindigkeit (gekoppeltes Modell für Seegang & Strömung minus Zirkulationsmodell) in der Deutschen Bucht. Die skalierten Vektorpfeile zeigen in die Richtung der seegangsinduzierten Strömung. Zeitpunkt: 21.00 Uhr am 16.02.1962.

Norder-/Süderoogsand sowie in den flachen Bereichen vor den ostfriesischen Inseln spürbar. Dort treten Betragsdifferenzen der mittleren Strömung von 0.2 m/s bis 0.8 m/s auf [Abb. 7.5].

Bei der vorherrschenden Windrichtung ist die seegangsinduzierte Strömung im Wesentlichen küstenparallel in die innere Deutsche Bucht hineingerichtet und führt zu einem zusätzlichen Anstau im Mündungsgebiet von Elbe und Weser. Im Wattgebiet ist diese Strömung oft uneinheitlich gerichtet. Die Struktur des Brandungsstroms hängt von den topographischen Gegebenheiten des Gebietes ab. Entlang der Küste von Sylt und den ostfriesischen Inseln ändert sich die Meerestiefe schon über wenige hundert Meter spürbar. Dort ist der Brandungsstrom sehr fokussiert. In den flachen Bereichen, Horns Rev, Norder-/Süderoogsand und der Ems Mündung, wo der Tiefengradient kleiner ist, bedeckt er ein größeres Gebiet. Die Auflösungsgrenze des Brandungsstroms ist im numerischen Modell durch die Dimension einer Gitterzelle gegeben. Die modellierten Variablen, Wasserstand und Strömung enthalten daher nur einen mittleren über die Größe einer Zelle integrierten Seegangseffekt. Wenn die Ausdehnung der Brandungszone wesentlich kleiner als die Größe einer Gitterzelle ist, dann kann der Betrag des tatsächlichen Brandungsstroms lokal größer sein.

Die Abbildung [7.6a] zeigt die Seegangssituation um 21:00 Uhr am 16.02.1962 mit Wellenhöhen von maximal 10 m im Norden der Deutschen Bucht. Die modellierte Wellenhöhe nimmt zur Küste hin graduell ab, besitzt an den Friesischen Inseln aber immer noch Werte von 7 bis 8 Metern. In Abbil-

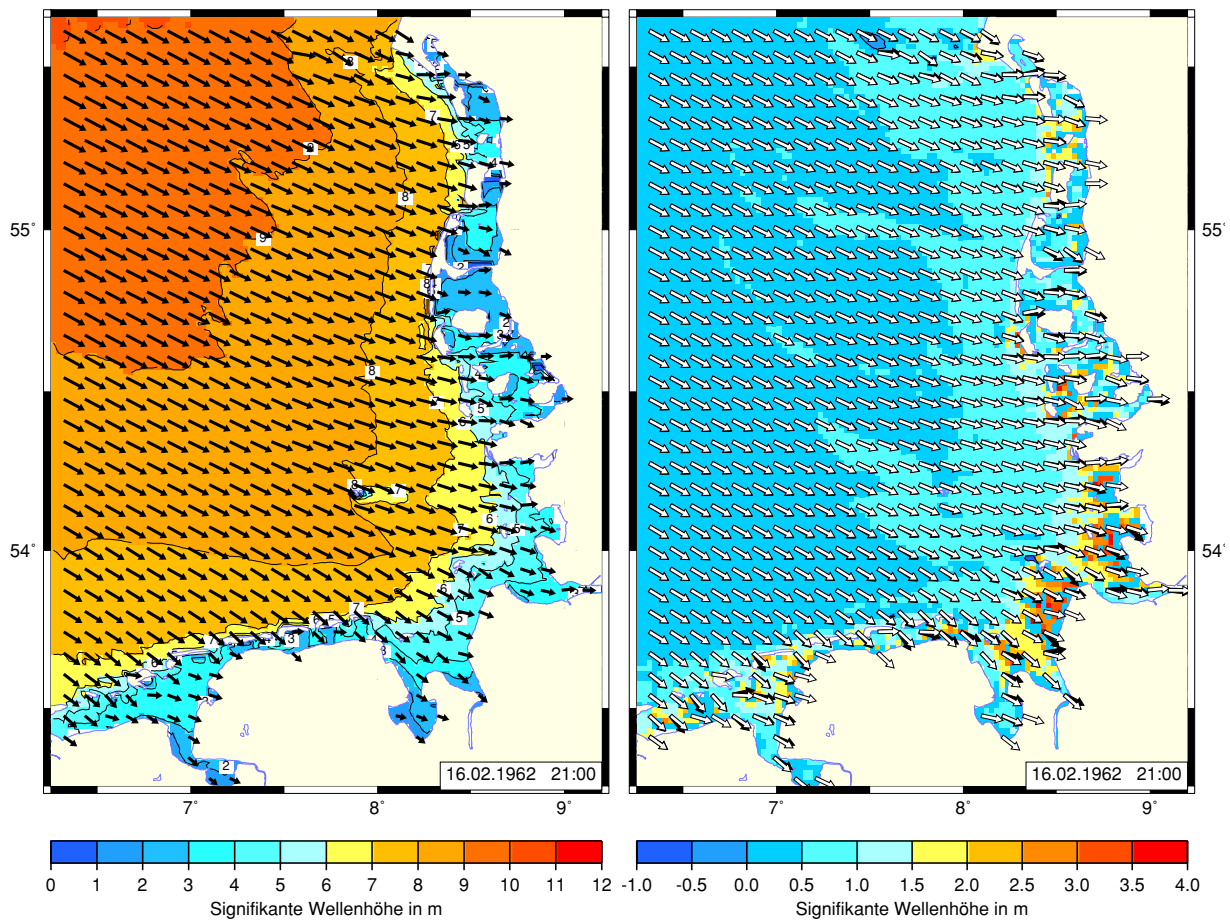


Abbildung 7.6: Wellenhöhe (links) (gekoppeltes Modell für Seegang & Strömung), Maximalwert 10 m , und Wellenhöhendifferenz (rechts) (gekoppeltes Modell minus Wellenmodell betrieben mit topographischen Wassertiefen und einer Strömung vom Betrage Null), Maximalwert $4,25 \text{ m}$, in der Deutschen Bucht zum Zeitpunkt 21.00 Uhr am 16.02.1962. Rechts: Die weißen (gekoppeltes Modell) und schwarzen (Wellenmodell) Pfeile zeigen in Ausbreitungsrichtung des Seegangs.

dung [7.6b] werden die Ergebnisse des gekoppelten Modells für Seegang und Strömung [Abb. 7.6a] mit den Ergebnissen des k -Modells, ohne Berücksichtigung von Strömungsfeldern und wasserstandsbedingter Variation der Meerestiefe, verglichen. Das Differenzbild [Abb. 7.6b] zeigt besonders hohe Werte hinter den Friesischen Inseln, in den flachen Bereichen des Wattenmeers. Dort beträgt die Tiefendifferenz zwischen den beiden Modellen über 3.5 m . Im Mündungsgebiet von Elbe und Weser sowie im Jadebusen ist die Differenz der Meerestiefe zwischen dem gekoppelten- und dem k -Modell maximal. Sie entspricht dem Wasserstand in [Abb. 7.2a] und ist größer als 4.5 Meter . In Abbildung [7.6b] ist die Propagationsrichtung der Wellen durch schwarze (k -Modell) und weiße (gekoppeltes Modell) Pfeile gekennzeichnet. Die Refraktion der Wellen ist in den flachen Bereichen aufgrund der geringeren Wassertiefen des k -Modells verstärkt. In Küstennähe weisen die schwarzen Pfeile eher in Richtung der Küstennormalen.

Für zwei Positionen² in der Deutschen Bucht sind in Abbildung [7.7] die Abweichungen der Seegangsparameter des gekoppelten Modell von den Ergebnissen des Wellenmodells ohne Berücksichtigung variabler Tiefen- und Strömungsfelder dargestellt. Man erkennt deutlich den Einfluss von Gezeiten-, Wind- und Wellenstau bedingten Schwankungen des Wasserstandes (blau) auf die modellierte Wellenhöhe (rot). Die Station im *Hörnum*-Becken (links) befindet sich in einem sehr flachen Gebiet, das während der Dauer eines Niedrigwassers auch trockenfallen kann. Am ersten Tag des Sturms (15.02.1962) sinken während der Ebbe sowohl Wassertiefe als auch Wellenhöhe des gekoppelten Modells [Abb. 7.7](links) gleichzeitig auf Null. Ein Wellenmodell, das mit konstanten Tiefen rechnet (gestrichelte Linie), kann diese Eigenschaft nicht reproduzieren.

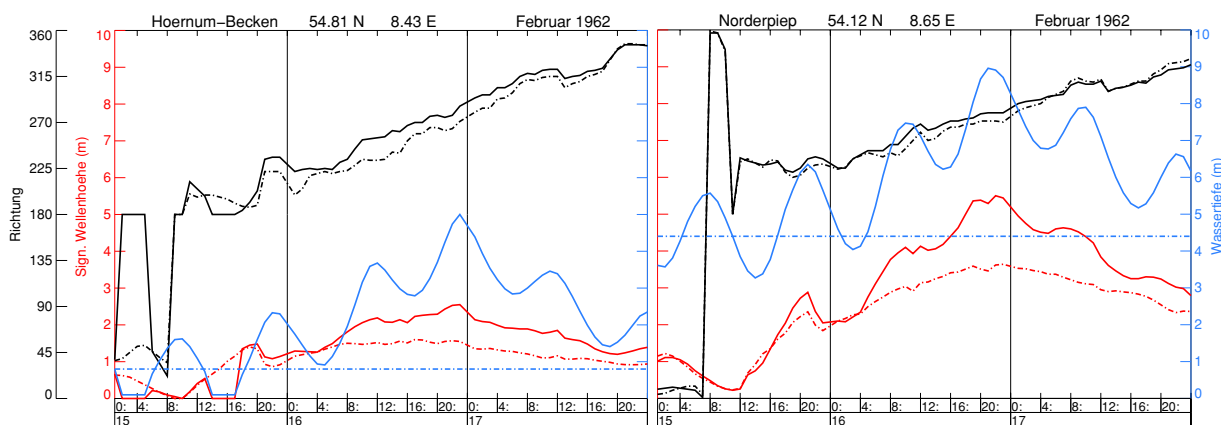


Abbildung 7.7: Vergleich der modellierten Zeitserien des gekoppelten Modells (durchgezogene Linien) mit den Ergebnissen des Wellenmodells ohne Berücksichtigung variabler Strömungs- und Tiefenfelder (gestrichelte Linien). Zeitraum: 15.02.1962 00:00 Uhr bis 17.02.1962 24:00 Uhr; Positionen: *Hörnum* (links) und *Norderpiep* (rechts); Signifikante Wellenhöhe (rot), Seegangsrichtung (schwarz) und Wasserstand (blau). Die Positionsangaben beziehen sich auf den nächstgelegenen Modell-Gitterpunkt.

Jede Änderung des Wasserstandes ist mit erheblichen Differenzen der Wellenhöhe zwischen den beiden Modellen verbunden. Zum Zeitpunkt des maximalen Hochwassers im *Hörnum*-Becken beträgt der Tiefenunterschied etwa 4 m . Die modellierten Wellenhöhen weisen aber nur eine relativ geringe Differenz von etwa 1 m auf. Durch die geringe Tiefe und den begrenzten Fetch innerhalb des Gebietes ist die Wellenhöhe des Seegangs beschränkt. An der nicht abgeschirmten Position *Norderpiep* [Abb. 7.7] (rechts) beträgt der Unterschied zwischen den modellierten Wellenhöhen bei einer vergleichbaren Tiefendifferenz nahezu 2 m .

Zu dem betrachteten Zeitpunkt 1962 gab es noch nicht die Möglichkeit, objektive Messungen mit Hilfe von Bojen und Radarsystemen auf Satelliten oder Flugzeugen durchzuführen. Deshalb werden

²Zur Lage der Positionen siehe Abbildung [10.1] im Anhang

die aufgezeichneten Daten der Feuerschiffs-Besatzungen von *P12* und *Borkumriff* für einen Vergleich der modellierten Seegangparameter mit Beobachtungswerten herangezogen. In Abbildung [7.8] sind zwei Messreihen (gestrichelte Linien) zu sehen, die eine gute Übereinstimmung mit den modellierten Zeitreihen (durchgezogene Linie) zeigen. Die modellierte Seegangsrichtung stimmt ebenfalls mit der beobachteten Windrichtung überein [Abb. 7.8]. Auch der zeitliche Verlauf der gemessenen Wellenhöhe (blau) kann gut durch das gekoppelte Modell reproduziert werden. An der Position *Borkumriff* zeigen die beobachteten Wellenhöhen eine größere Abweichung von den modellierten Werten, nachdem der Sturm am 16.02.1962 um 22:00 Uhr seinen Höhepunkt erreicht hatte. Erklärungen dafür sind spekulativ. Beobachtungen der Wellenhöhe sind bei Dunkelheit schwierig. In Abbildung [7.8] ist die auf Re-Analysen beruhende Windstärke (rot) des DWD-Lokalmodells *LM* im Vergleich mit den Beobachtungsdaten der Feuerschiffs-Besatzungen dargestellt. Die Windstärke wurde nach der Beaufort-Skala geschätzt [DHI63], [Due85]. Es zeigen sich stellenweise Unterschiede von bis zu 4 m/s . Über den gesamten Zeitraum betrachtet, stimmen die gemessenen- und die modellierten Werte gut miteinander überein.

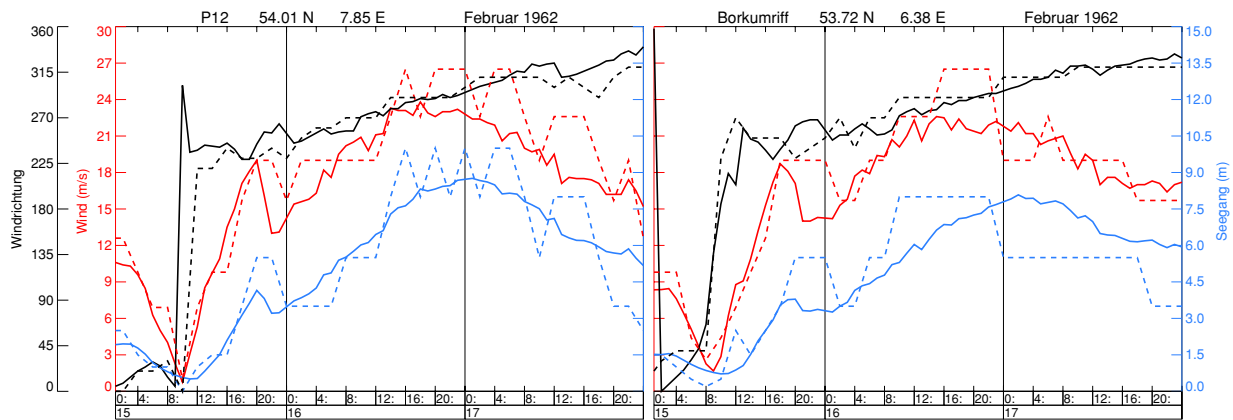


Abbildung 7.8: Vergleich von Beobachtungen (gestrichelte Linien) der Windgeschwindigkeit (rot), Windrichtung (schwarz) und der signifikanten Wellenhöhe (blau) mit den numerischen Modellergebnissen (durchgezogene Linien) für den Zeitraum 15.02.1962 00:00 Uhr bis 17.02.1962 24:00 Uhr. Die Werte wurden von den Besatzungen der Feuerschiffe *P12* (links) und *Borkumriff* (rechts) beobachtet. Die Positionsangaben beziehen sich auf den nächstgelegenen Modell-Gitterpunkt.

Die Seegangsbeobachtungen der Feuerschiffs-Besatzungen beruhen auf Schätzungen, was bei einem quantitativen Vergleich mit den Simulationsergebnissen beachtet werden muss. An den beiden ausgewählten Positionen *P12* und *Borkumriff* unterscheiden sich die beobachteten und modellierten Werte aber nicht wesentlich. Die physikalischen Prozesse während einer Sturmflut in der Nordsee können qualitativ recht gut durch das gekoppelte Modell reproduziert werden. Eine seegangsinduzierte Erhöhung des Wasserstandes um bis zu 1 m als größten Einzelwert und 0.6 m in weiten Gebieten des Wattenmeeres lässt sich aus den Modellergebnissen ablesen. Die vorherrschende Windrichtung aus Nordwest erzeugt eine regional an der Küste einsetzende Brandungslängsströmung. Bei Sylt und den Ostfriesischen Inseln erreicht die seegangsinduzierte Strömung Werte von 0.2 m/s bis 0.6 m/s . Die in diesem Kapitel dargestellten Ergebnisse sind charakteristisch für ein Sturmereignis. Bei normalen Wetterlagen sind die seegangsbedingten Änderungen des Wasserstandes (wave setup) und der Strömung (Küstenlängsströmung) erheblich kleiner. Aufgrund der ausgeprägten Gezeit in der Nordsee ist der Einfluss veränderlicher Tiefen auf die Dynamik des Seegangs wesentlich größer als umgekehrt der Effekt räumlich variierender Wellenfelder auf die Dynamik der mittlere Strömung.

7.3 Hindcast-Rechnung (1999, 2003): Vergleich der Modellergebnisse mit Messdaten

Die Simulation der Sturmflut von 1962 liefert Ergebnisse, die nur mit den Beobachtungen der Feuerschiffs-Besatzungen und den gemessenen Pegelkurven verglichen werden können. Da zu diesem Zeitpunkt auf den Schiffen noch keine Messverfahren für die Wellenhöhe zur Verfügung standen, wurden die Vergleichswerte abgeschätzt. Eine Gegenüberstellung der Simulationsergebnisse mit den Beobachtungswerten zeigt, dass die modellierten Wellenhöhen generell höher als die Schätzwerte sind, die Seegangsrichtung aber mit guter Genauigkeit bestimmt werden konnte. Für einen Vergleich des gekoppelten Modells mit objektiveren Messverfahren wurde die Sturmflut von 1999 und ein Sturm des Jahres 2003 ausgewählt. Für beide Zeiträume stehen gemessene Zeitreihen der Wellenhöhe, Wind- bzw. Seegangsrichtung und der mittleren Periode T_{m1} zur Verfügung. Die meteorologischen Daten zum Antrieb der Modelle stammen aus den operationellen Vorhersagemodellen des DWD und wurden in den betreffenden Jahren berechnet und im BSH gespeichert.

7.3.1 Die Sturmflut von 1999

Eine detaillierte Beschreibung der Sturmflut-Wetterlage am 3.12.1999 findet sich im „Klimastatusbericht 1999“ des Deutschen Wetterdienstes [Lef99]:

„Das Orkantief „Anatol“ entwickelte sich am 2. Dezember über dem Nordatlantik. Es verlagerte sich unter Vertiefung rasch ostwärts und war in den Nachtstunden zum 3. Dezember von einer schwachen Welle zu einem Sturm-Tief mit einem Kerndruck von 985 *hPa* gereift. Das Zentrum des Sturms lag zu diesem Zeitpunkt nördlich von Irland. Durch einen Kurzwellentrog in der Höhe erfuhr das Tief günstige Entwicklungsbedingungen und vertiefte sich in nur etwa 12 Stunden um weitere 40 *hPa* auf 952 *hPa* zum Orkantief. Dabei zog es über die Nordsee, im Bereich des Limfjordes über Jütland (Dänemark), über Südschweden (in der Nacht zum 4. Dezember) und die Ostseeinsel Gotland, das Baltikum und weiter nach Russland, wo es sich dann bald abschwächte.“

Solch kleinräumige, schnell ziehende Tiefdruckgebiete erzeugen Sturmfluten vom zirkularen Typ. Das Orkantief „Anatol“ war in Dänemark der stärkste Orkan des 20. Jahrhunderts. Der maximale Mittelwind an der Westküste Südjütlands erreichte Geschwindigkeiten von 38 *m/s* mit maximalen Böen um 50 *m/s*. In der südlichen Deutschen Bucht wurden Winde von 26 *m/s* gemessen mit Böen bis zu 35 *m/s* [Mue02]. In Abbildung [7.9] (oben) ist die Wind- und Seegangssituation zum Zeitpunkt der maximal gemessenen Windgeschwindigkeit in der Deutschen Bucht³ dargestellt (03.12.1999, 16:00 Uhr). Das Zentrum des Tiefdruck-Wirbels befindet sich nordwestlich von Jütland (Dänemark). An der dänischen und schleswig-holsteinischen Küste ist eine Windrichtung aus Westsüdwest vorherrschend. Später dann dreht der Wind auf West und in den frühen Abendstunden des 3. Dezembers auf Westnordwest. Die Struktur des Wellenfeldes [Abb. 7.9] entspricht im Wesentlichen der Struktur des Windfeldes. In der äußeren Deutschen Bucht werden Wellenhöhen von maximal 14 *m* modelliert. Zur Küste hin nimmt die signifikante Wellenhöhe ab, erreicht aber immer noch Werte von 7 *m* bis 9 *m* an der Seeseite von Sylt und den anderen Inseln des Wattenmeeres. Bei einer Sturmflut ist nicht nur der Betrag der Windgeschwindigkeit entscheidend, sondern auch die Richtung. Die aus Westsüdwest auflaufenden Wellen erzeugen eine deutliche Küstenlängsströmung an den Ostfriesischen Inseln [Abb. 7.9] (unten, rechts). Besonders ausgeprägt ist die seegangsbedingte Strömungsdifferenz in dem fla-

³Die Position der Station *Deutsche Bucht* ist in Abbildung [10.1] verzeichnet.

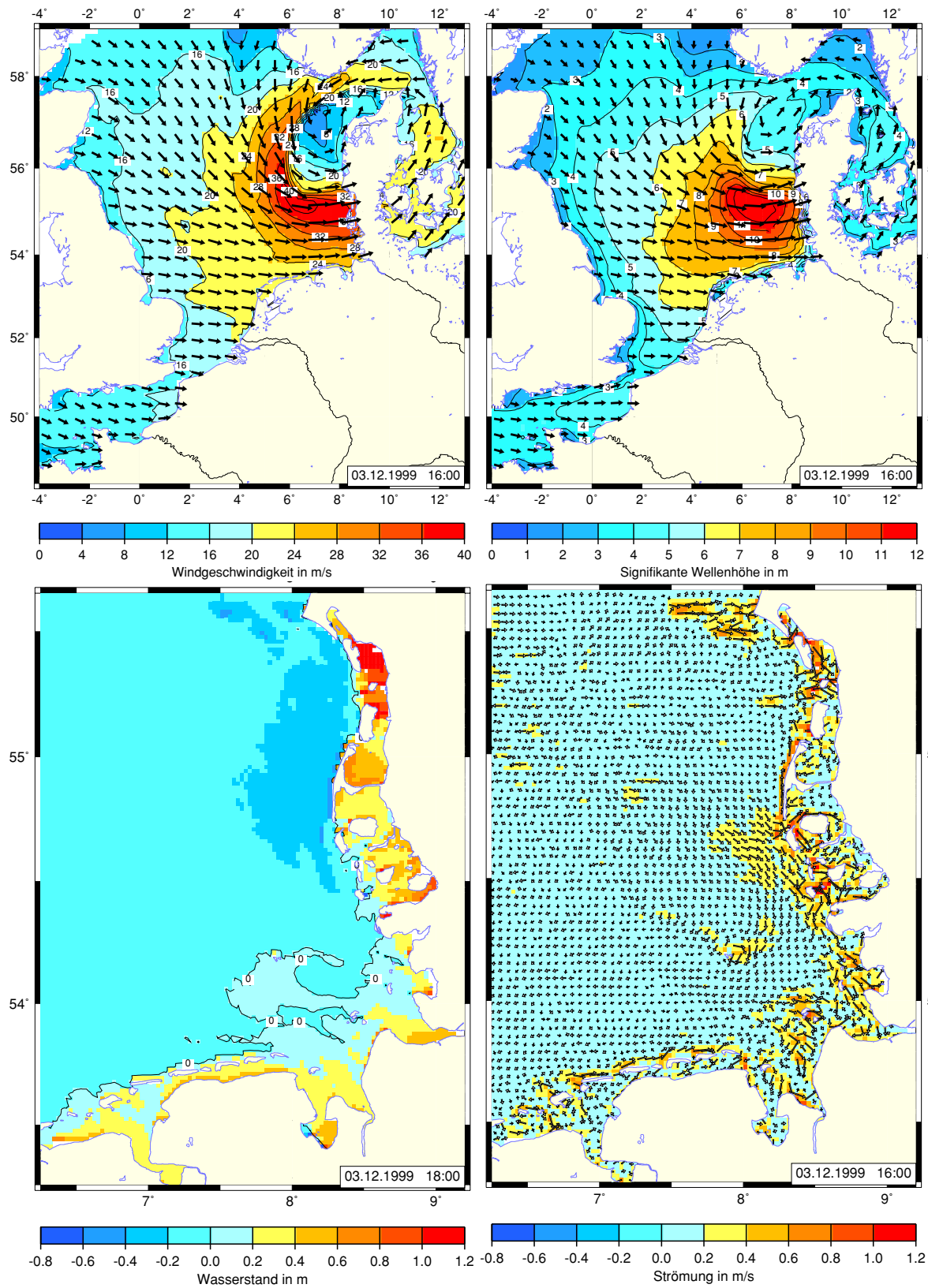


Abbildung 7.9: Oben: Windgeschwindigkeit (links) und signifikante Wellenhöhe (rechts) in der Nordsee und dem Kattegat/Skagerrak zum Zeitpunkt 16:00 Uhr am 03.12.1999. Die Wellenhöhe H_s (rechts) wurde mit gekoppelten Modell für Seegang und Strömung berechnet. Unten: Differenz von Wasserstand (links) (18:00 Uhr) und Strömung (rechts) zwischen dem gekoppelten Modell für Seegang und Strömung und dem Zirkulationsmodell.

chen Gebiet von Horns Rev und vor Sylt. In unmittelbarer Nähe der Küste reduziert sich die Energie der Wellen erheblich. Unmittelbar vor Sylt beträgt die Abnahme der signifikanten Wellenhöhe auf kurzer Distanz etwa 8 m. Bedingt durch die vorherrschende Wind- und Seegangsrichtung wird längs der Küste von Sylt eine nördlich gerichtete Strömungskomponente induziert. Die geometrische Bedingung für eine maximale Küstenlängsströmung ist ein Einfallswinkel der Wellen von nahezu 45° . Bei Seegang aus Südwest wäre der Betrag der wellenbedingten Strömung sicher größer gewesen. So aber beträgt er an der Südflanke von Sylt etwa 40 cm/s bis 60 cm/s und an der Nordflanke 60 cm/s bis 80 cm/s. Dort reicht der Einfallswinkel näher an 45° heran. In den tieferen Gebieten sind die dargestellten Beträge des Differenzvektors der Strömung (gekoppeltes Modell minus Zirkulationsmodell) unerheblich und die Richtungen breit gestreut.

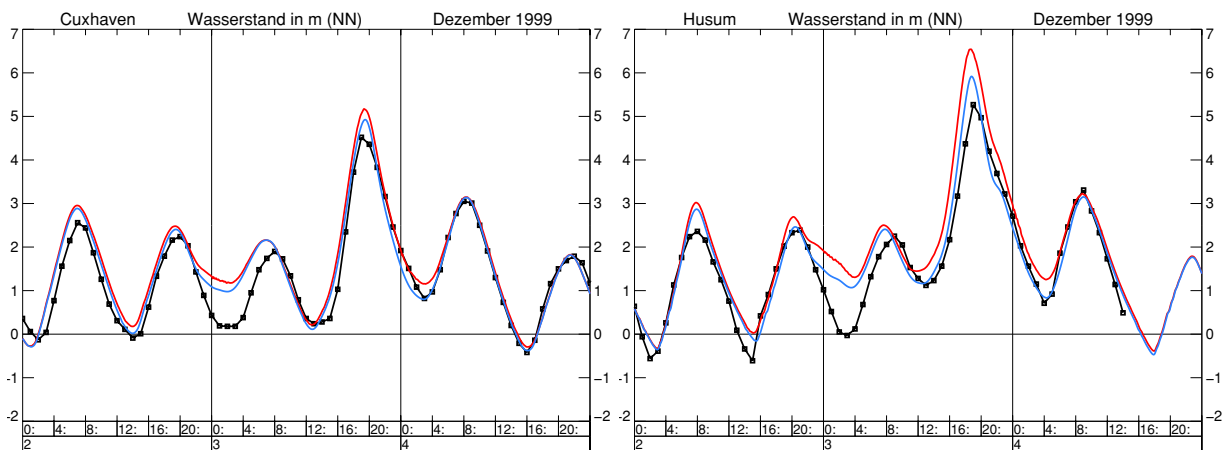


Abbildung 7.10: Vergleich der Pegelkurven (schwarz) von Cuxhaven und Husum mit den modellierten Wasserständen: BSH-Zirkulationsmodell (blau), Gekoppeltes Modell für Seegang und Strömung (rot) für den Zeitraum 02.12.1999 00:00 Uhr bis 04.12.1999 24:00 Uhr in Cuxhaven (links) und Husum (rechts).

Das Sturmtief zog so schnell über Dänemark hinweg, dass zwischen dem gemessenen Maximalwert der Windgeschwindigkeit und des Wasserstandes eine zeitliche Differenz von etwa zwei Stunden besteht. In Abbildung [7.9] (unten, links) ist die räumliche Verteilung der Wasserstandsdifferenz zwischen dem gekoppelten Modell und dem Zirkulationsmodells dargestellt. Ein deutlich erhöhter Wasserstand ist in den nordfriesischen Wattgebieten zu erkennen. Bei Esbjerg wird eine seegangsbedingte Wasserstandserhöhung von über einem 1 m berechnet. Durch den bis dahin vornehmlich westlichen Wind ist das Wasser von der Seeseite der Inseln her in das Wattenmeer hinein transportiert worden. Vor den dänischen und schleswig-holsteinischen Inseln ist dagegen der Wasserstand in einem ausgedehnten Gebiet um 20 cm bis 40 cm erniedrigt. Von der Ems- bis zur Elbmündung beträgt die Differenz des Wasserstandes noch 20 cm bis 40 cm, stellenweise bis zu 60 cm.

Für die Orte Cuxhaven und Husum werden in Abbildung [7.10] die modellierten Zeitreihen des Wasserstandes mit den Pegelmessungen verglichen. Der zusätzliche Brandungstau auflaufender Wellen führt zum Zeitpunkt des maximalen Hochwassers in Cuxhaven zu einer seegangsbedingten Wasserstandsdifferenz von etwa 25 cm. Bei Husum [Abb. 7.10](rechts) ist die Differenz mit ca. 60 cm bedeutend größer. Die hier präsentierten Ergebnisse sind mit den Resultaten für die Sturmflut von 1962 [Abb. 7.3] vergleichbar. Über den gesamten Zeitraum hinweg sind die Werte des gekoppelten Modells größer als die Werte des Zirkulationsmodells. Besonders deutlich ist diese Differenz zu den Zeitpunkten der Hoch- und Niedrigwasser.

In Abbildung [7.12] werden die gemessenen Werte (dünne Linien) der Wellenhöhe (rot), Seegangsrichtung (schwarz) und mittlere Periode T_{m1} (grün) mit den modellierten Werten (dicke Linien) an der Position NSB-2 verglichen. Die Positionsangaben in [Abb. 7.11] und [Abb. 7.12] beziehen sich auf den nächstgelegenen Modellgitterpunkt. Die Messwerte des Seegangs sind leider lückenhaft und

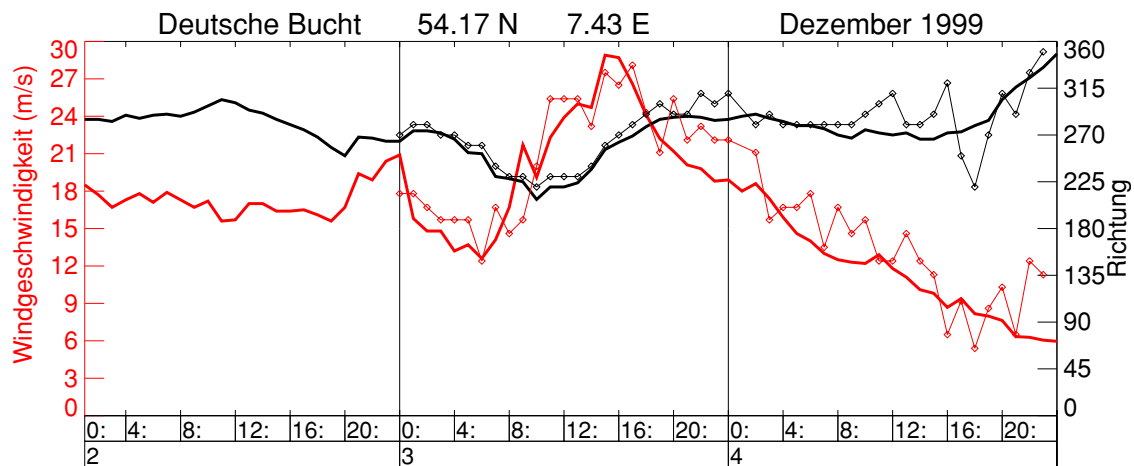


Abbildung 7.11: Vergleich der gemessenen Zeitserien (dünne Linien) für die Windgeschwindigkeit (rot) und Windrichtung (schwarz) mit den Simulationsergebnissen des DWD Lokalmodells (dicke Linien). Windgeschwindigkeit (rot), Windrichtung (schwarz). Zeitraum: 02.12.1999 00:00 Uhr bis 04.12.1999 24:00 Uhr. Station Deutsche Bucht

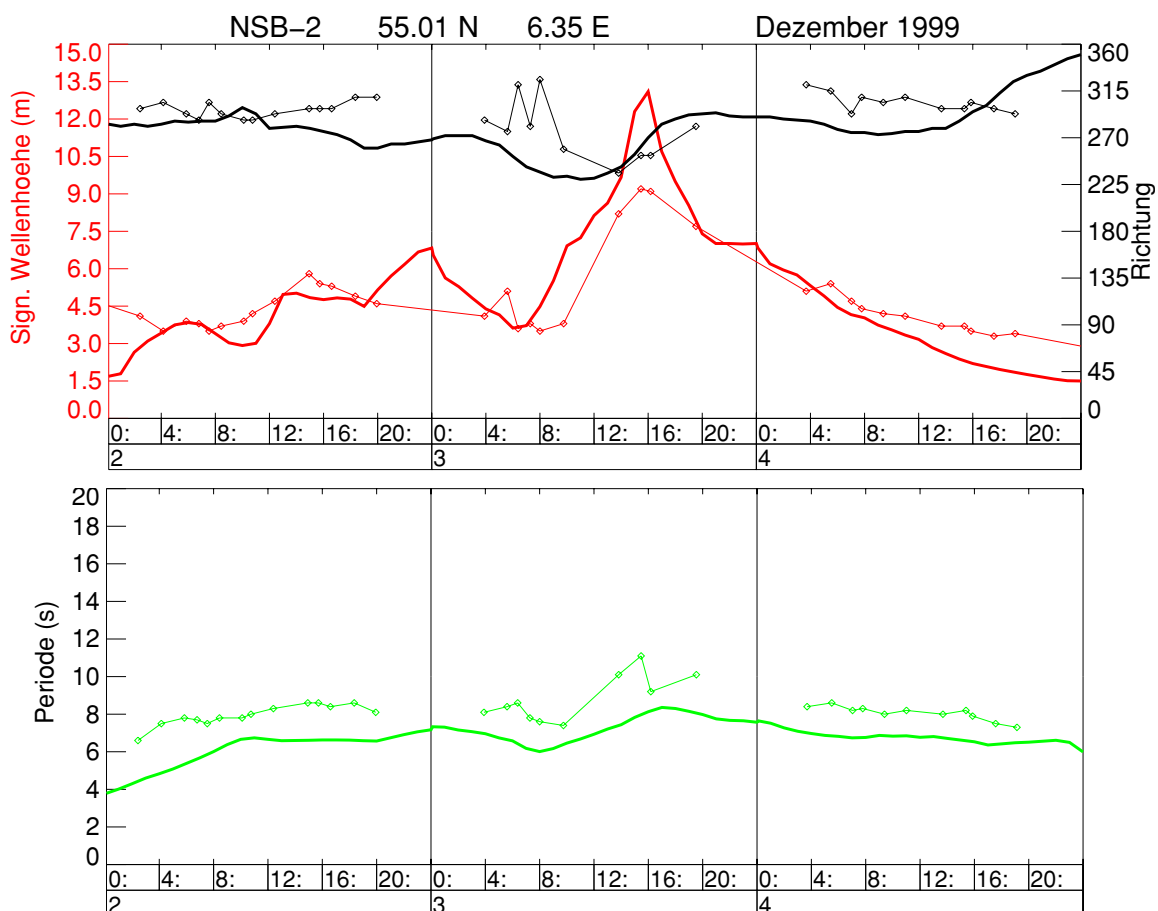


Abbildung 7.12: Vergleich der gemessenen Zeitserien (dünne Linien, Rauten) für die signifikante Wellenhöhe (rot) und Seegangsrichtung (schwarz) mit den modellierten Werten (Dicke Linien) für den Beobachtungszeitraum 02.12.1999 00:00 Uhr bis 04.12.1999 24:00 Uhr. Die gemessenen und modellierten Werte der mittleren Periode T_{m1} (Fußnote 4) sind grün dargestellt. Die Positionen der Messstation NSB-2 ist in Abbildung 10.1 eingezeichnet.

weisen in beiden Nächten zeitliche Sprünge auf [Abb. 7.12]. Über den Zeitraum des Sturms hinweg liegen aber genügend Vergleichswerte vor. Messwerte des Windes an der Station *NSB-2* sind nicht vorhanden. Deshalb wurden in Abbildung [7.11 und 7.12] die Daten der Station *Deutsche Bucht* den Seegangsdaten gegenübergestellt. Die zeitliche Entwicklung des Windfeldes ist an beiden Stationen vergleichbar. In der Deutschen Bucht [Abb. 7.11] stimmen die Messdaten (dünne Linien) für die Windgeschwindigkeit (rot) und Richtung (schwarz) gut mit den berechneten Werten (dicke Linien) überein. Dahingegen erkennt man in Abbildung [7.12] deutlich, dass die modellierte Wellenhöhe zum Höhepunkt des Sturms (3. Dezember, 16:00 Uhr) zu hoch ist. Sie übersteigt die gemessene Wellenhöhe an der Station *NSB-2* um etwa 4.2 m. Die Station *NSB-2* liegt in der äußeren Deutschen Bucht, wo das gekoppelte Modell Wellenhöhen von bis zu 14 m berechnet. Die modellierten Perioden⁴ T_{m1} können den zeitlichen Verlauf der gemessenen Perioden qualitativ wiedergeben, sind aber gleichbleibend um etwa zwei Sekunden kleiner als die Messwerte. Eine Gegenüberstellung der modellierten Perioden T_{m1} mit den gemessenen Werten bei *Süderhever* und *NSB-2* zeigt eine bessere Übereinstimmung der dargestellten Werte in der Nähe der Küste (*Süderhever* [Abb. 7.13]). Im Vergleich zum fast konstanten Offset bei *NSB-2* [Abb. 7.12] ist die Differenz der T_{m1} Perioden an der Küste gering. Auch der Unterschied zwischen modellierter und gemessener Wellenhöhe ist an der Station *Süderhever* kleiner als bei *NSB-2*. Er beträgt aber immer noch 3.3 m. Auf dem offenen Meer, ohne Begrenzung des Fetch entwickelt sich der modellierte Seegang unter den Bedingungen dieser schweren Sturmflut zu rasch. Deshalb ist die modellierte Wellenhöhe bei *NSB-2* [Abb. 7.12] deutlich zu groß. An der Küste ist die Höhe der einlaufenden Wellen topographisch bedingt kleiner als auf dem offenen Meer. Die Source-Funktionen des k -Modells sind aber so justiert worden, dass sie für die gesamte Nordsee Gültigkeit besitzen. Wahrscheinlich ist deshalb der modellierte Seegang in Küstennähe noch nicht stark genug gedämpft worden [Abb. 7.13].

Wie die Modellergebnisse in diesem Kapitel zeigen, ist das k -Modell für einen Einsatz in den tieferen Bereichen der Nordsee nur bedingt geeignet. Es wurde zu dem Zweck konstruiert, hoch variablen Strömungsfeldern und Wassertiefen sowie begrenztem Fetch in Küstennähe Rechnung zu tragen. Die Source-Funktionen des k -Modells sind an diese Bedingungen angepasst [Sch97] worden. Außerhalb des Küstennahfeldes ist die Voraussetzung für das Ersetzen der nichtlinearen Wechselwirkung von Seegangsmode durch die nichtlineare Dissipation von Wellenenergie (Kapitel 6.2.1) nicht mehr ge-

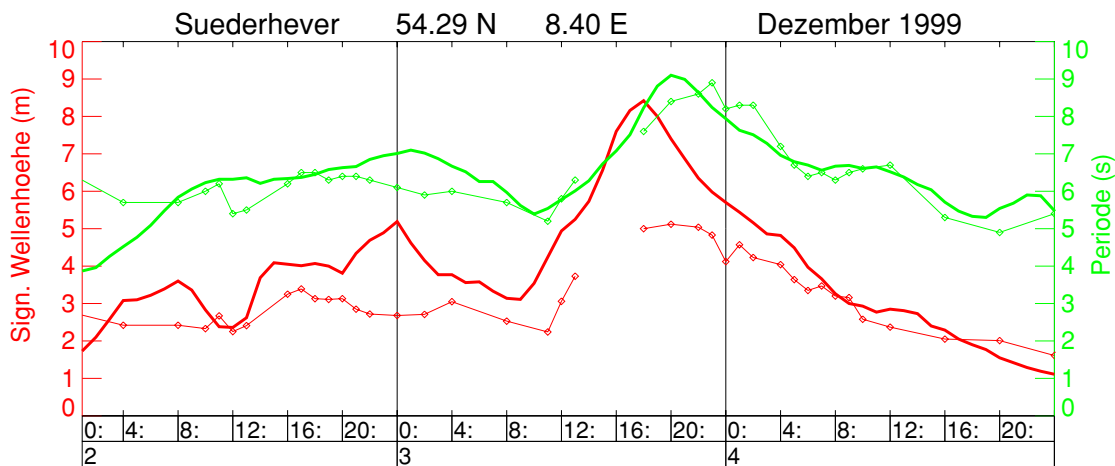


Abbildung 7.13: Vergleich der Gemessene Zeitserien (dünne Linien) für die signifikante Wellenhöhe (rot) und mittlere Seegangsperiode T_{m1} (grün) mit den modellierten Werten (dicke Linien) für den Beobachtungszeitraum 02.12.1999 00:00 Uhr bis 04.12.1999 24:00 Uhr. Die Positionen der Messstation *Süderhever* ist in Abbildung 10.1 eingezeichnet.

⁴ Die mittlere Periode T_{m1} eines Spektrums ist durch den Quotienten $T_{m1} = m_0/m_1$ gegeben. Das n -te Moment eines kontinuierlichen Spektrums $E(f)$ (Frequenz $f = \sigma/2\pi$) entspricht $m_n = \int f^n E(f) df$.

geben. In den tieferen Gebieten der Nordsee ist es daher sinnvoll, das k -Modell durch ein für diesen Bereich geeignetes Wellenmodell, zum Beispiel WAM [Kom94], zu ersetzen. Das k -Modell würde nur noch im küstennahen Bereich zum Einsatz kommen und speziell auf die dortigen Bedingungen abgestimmte Sourceterme verwenden ([Sch98], pp 44).

7.3.2 Der Sturm vom 14./15. Dezember 2003

Während der Sturmperiode vom 13. bis 15. Dezember 2003 wurden in der Deutschen Bucht Windgeschwindigkeiten von über 20 m/s gemessen. Die vom Atmosphärenmodell des DWD simulierte Maximalgeschwindigkeit des Windfeldes betrug 25 m/s in der Nordsee und etwa 12 m/s bis 16 m/s an der deutschen Küste. In Abbildung [7.15] ist der zeitliche Verlauf der gemessenen und modellierten (DWD-Modell) Windgeschwindigkeit an der Station Deutsche Bucht [Abb. 10.1] dargestellt. Der anfangs nur schwache Wind aus Westsüdwest frischte in dem Zeitraum vom 13. bis zum 14. Dezember 2003 auf und drehte in Richtung Nordnordwest. Ein Vergleich der gemessenen Windgeschwindigkeit und Richtung mit den modellierten Werten zeigt eine gute Übereinstimmung [Abb. 7.15]. Zum Höhepunkt des Sturms am 15. Dezember 2003, 06:00 Uhr wurden Wellenhöhen von etwa 7 m bis 8 m in der äußeren Deutschen Bucht modelliert. Zum Land hin nimmt die Wellenhöhe ab, erreicht aber immer noch Werte von über 6 m an der Ost-Friesischen Küste und 4 m bis 5 m an der Nordfriesischen Küste.

Das höchste Hochwasser bei Cuxhaven am 15.12.2003 morgens liegt etwa 3.0 m über NN und etwa 1.5 m über dem mittleren Hochwasser. Das entspricht gerade dem derzeit verwendeten Schwellenwert, ab dem von einer Sturmflut die Rede ist. Im Vergleich zu den Ergebnissen von Kapitel 7.2 und 7.3.1, für sehr schwere Sturmfluten, ist der Einfluss von Seegang auf die Dynamik der mittleren Strömung eher gering.

Anhand der langen Zeitreihe [Abb. 7.14] sieht man, dass beide Modelle die gemessenen Wasserstände recht gut wiedergeben können, solange die Pegelkurve (schwarz) nicht sehr weit von der astronomisch bestimmten Tide abweicht. In den ersten vier Tagen der Zeitreihe ist das der Fall. In diesem Zeitraum sind die modellierten Wasserstände des gekoppelten Modells (rot) und des Zirkulationsmodells

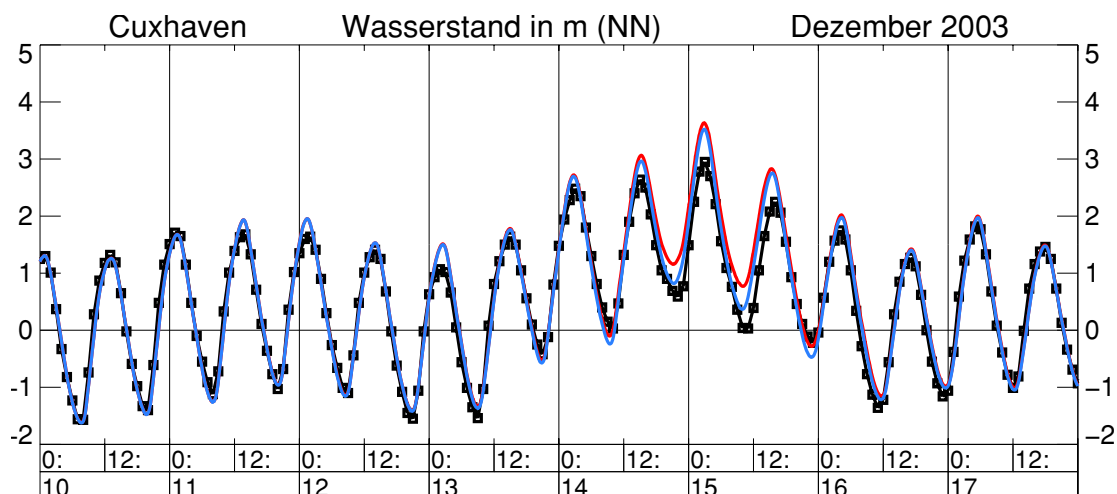


Abbildung 7.14: Vergleich der Pegelkurven (schwarz) mit den modellierten Wasserständen: BSH-Zirkulationsmodell (blau), Gekoppeltes Modell für Seegang und Strömung (rot) für den Zeitraum 10.12.2003 00:00 Uhr bis 17.12.2003 24:00 Uhr in Cuxhaven.

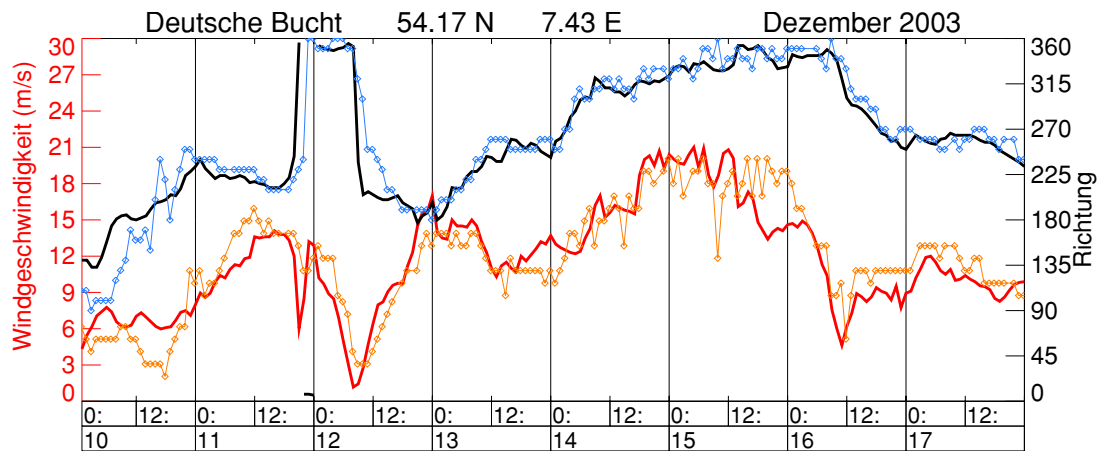


Abbildung 7.15: Vergleich der gemessenen Zeitserien (dünne Linien) für die Windgeschwindigkeit (ockerfarben) und Windrichtung (blau) mit den Simulationsergebnissen des DWD Lokalmodells, Windgeschwindigkeit (rot), Windrichtung (schwarz). Zeitraum: 10.12.2003 00:00 Uhr bis 17.12.2003 24:00 Uhr. Position: Deutsche Bucht.

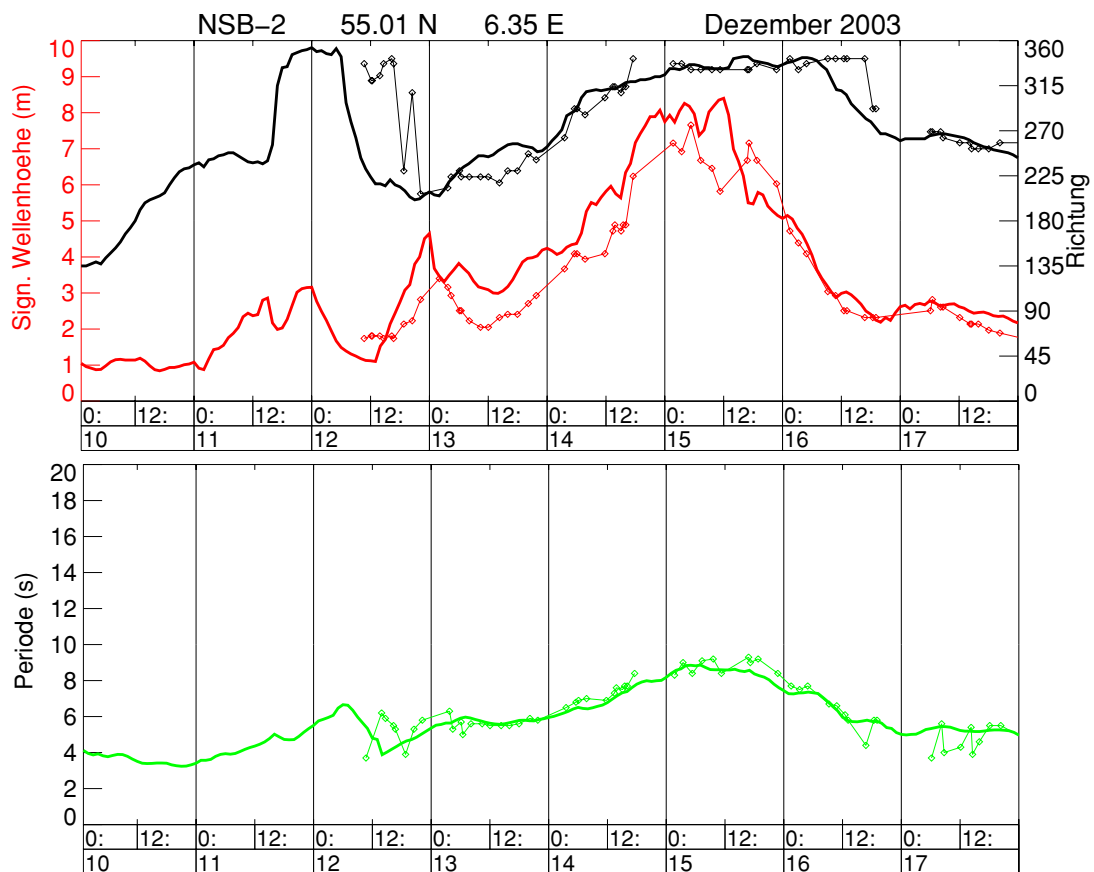


Abbildung 7.16: Vergleich der gemessenen Zeitserien (dünne Linien) für die signifikante Wellenhöhe (rot) und mittlere Periode T_{m1} (grün) mit den modellierten Zeitserien des gekoppelten Modells für Seegang und Strömung (dicke Linien). Die gemessene und modellierte Seegangrichtung ist im oberen Bild schwarz dargestellt. Zeitraum: 10.12.2003 00:00 Uhr bis 17.12.2003 24:00 Uhr. Position: NSB-2

(blau) nahezu identisch. Nur bei windbedingt erhöhten Wasserständen, wie am 14./15. Dezember 2003, weicht das gekoppelte Modell nach oben hin ab. Über den gesamten Zeitraum betrachtet, sind die modellierten Werte beider Modelle verglichen mit den Messwerten (schwarz) zu hoch.

In Abbildung [7.16] werden die gemessenen Werte (dünne Linien) der Seegangrichtung (schwarz), Wellenhöhe (rot) und mittlerer Periode T_{m1} (grün) mit den entsprechenden Werten des gekoppelten Modells (dicke Linien) verglichen. Die Angaben über die Position der Messstation *NSB-2* in der äußeren Deutschen Bucht beziehen sich auf die nächstgelegene Gitterzelle. Die modellierten Zeitserien für Wellenhöhe und Seegangsperiode können den zeitlichen Verlauf der gemessenen Größen gut reproduzieren, zeigen aber eine deutlich höhere Differenz zu den Messwerten als die meteorologischen Eingangsgrößen [Abb. 7.15]. Während der Sturmperiode vom 12. bis zum 15. Dezember 2003 liegen die Werte der modellierten Wellenhöhen etwa 1 m über den gemessenen Werten [Abb. 7.16 (oben)] an der Station *NSB-2*. Dahingegen kann das gekoppelte Modell den zeitlichen Verlauf der Messkurve nach dem Höhepunkt des Sturms am 15. Dezember 2003 gut reproduzieren. Ein Vergleich der modellierten und gemessenen Perioden T_{m1} [Abb. 7.16 (unten)] zeigt eine im Verhältnis zu den Wellenhöhen bessere Übereinstimmung der Werte. Für die leichte Sturmflut von 2003 ist das gekoppelte Modell wesentlich besser dazu in der Lage, die gemessenen Perioden T_{m1} zu reproduzieren, als es das im Falle der schweren Sturmflut von 1999 war. Nur zu Beginn der Messreihe am 12. Dezember 2003 zeigen sich qualitative Unterschiede zwischen den modellierten und gemessenen Werten. In der zweiten Hälfte dieses Tages wechselt der Wind von Nord nach Südwest und die Seegangrichtung dreht von 360° auf 225° . Die Wellen entwickeln sich nun in Richtung des Südwest-Windes, und die dargestellten Modellwerte für Wellenhöhe und Periode werden zunächst kleiner. Der bei *NSB-2* registrierte Seegang wird aber zunächst noch durch alten Seegang (Dünung) aus Nord dominiert.

Unter den gegebenen Bedingungen einer leichten Sturmflut mit langanhaltend erhöhten Windgeschwindigkeiten ist das gekoppelte Modell für eine Prognose der mittleren Seegangsgrößen in der äußeren Deutschen Bucht geeignet. Dahingegen kann es in Küstennähe nur den qualitativen Verlauf der Messkurve an der Station *Süderhever* [Abb. 7.17] wiedergeben. Dort stimmen die gemessenen und modellierten Werte für die schwere Sturmflut vom 3. Dezember 1999 [Abb. 7.13] besser miteinander überein, als dies für den Wintersturm des Jahres 2003 [Abb. 7.17] der Fall ist. In Küstennähe wird der Seegang nicht stark genug gedämpft. Dort hängt der simulierte Wert für die Wellenhöhe entscheidend von der Topographie des Modellgebietes ab. An der Küste können kleinräumige Tiefenvariationen großen Einfluss auf die Struktur des Seegangfeldes haben. Die räumliche Auflösung des Modells ist durch die Größe einer Gitterzelle begrenzt. Deshalb werden Bodenstrukturen mit

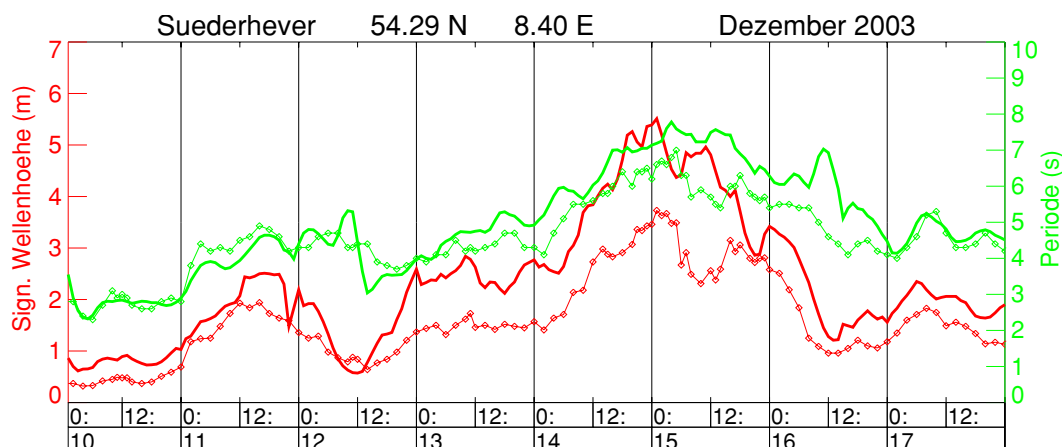


Abbildung 7.17: Vergleich der gemessenen Zeitserien (dünne Linien) für die signifikante Wellenhöhe (rot) und mittlere Periode T_{m1} (grün) mit den modellierten Zeitserien des gekoppelten Modells für Seegang und Strömung (dicke Linien). Zeitraum: 10.12.2003 00:00 Uhr bis 17.12.2003 24:00 Uhr. Position: Süderhever

einer Ausdehnung von wenigen Seemeilen nur annähernd erfasst. Außerdem wird eine feste Modelltopographie verwendet, die der Variabilität des Gebietes nicht Rechnung tragen kann. Sandbänke (Süderoggsand) und Priele ändern öfter ihre Gestalt und führen je nach Windsituation zu unterschiedlichen Seegangsfeldern. Deshalb ist es nicht überraschend, dass die modellierten Wellenhöhen und Seegangsperioden sich von den gemessenen Werten unterscheiden. Zum Höhepunkt des Sturms nimmt die Höhe der modellierten Wellen in Richtung Küste auf wenigen Kilometern von über 5 m östlich von Helgoland auf unter 2 m zwischen den Nordfriesischen Inseln ab. An der Position von Messstation *Süderhever* werden Werte von etwa 5.5 m berechnet. Die gemessene Wellenhöhe ist etwa 1.8 m kleiner und liegt bei 3.7 m.

7.3.3 Zusammenfassung des Hindcast-Kapitels

Mit dem gekoppelten Modell für Seegang und Strömung ist nun ein Werkzeug verfügbar, das gleichermaßen für die Vorhersage der mittleren (Zirkulations-) Größen (Wasserstand, Strömung, Temperatur, Salzgehalt, etc.) als auch für die Prognose der Seegangsgrößen geeignet ist. Das neue Modell beinhaltet die wesentlichen physikalischen Prozesse im Ozean. Hindcast-Rechnungen zeigen, dass die Wechselwirkung von Seegang und großräumiger Zirkulation qualitativ richtig wiedergegeben wird. Für eine leichte Sturmflut (Kap. 7.3.2) stimmen die modellierten Größen mit den gemessenen Werten an der Station *NSB-2* in der Nordsee überein. Dahingegen werden im Falle der schweren Sturmflut von 1999 (Kap. 7.3.1) zu große Wellenhöhen und zu niedrige mittlere Perioden⁵ T_{m1} vorhergesagt. Bei dem verwendeten Wellenmodell handelt es sich um das k -Modell der *GKSS*. Dieses speziell für die Vorhersage der Seegangsverhältnisse in Küstennähe optimierte Modell wurde ebenfalls für die Prognose in tieferen Seegebieten verwendet. Unter den dortigen Bedingungen, ausreichende Wassertiefen und nahezu unbegrenzter Fetch, entwickelt sich der Seegang auf längeren Zeitskalen und ungestört von ständig variierenden Umgebungsvariablen (z.B. Strömung, Tiefe), wie sie für eine Küstenregion typisch sind. Das k -Modell kann in der Nordsee nur eingeschränkt verwendet werden. In den küstenfernen Regionen wird der Beitrag nichtlinearer Wechselwirkung von Seegangsmoden zur zeitlichen Entwicklung des Spektrums wichtig. Dort muss das k -Modell durch ein Wellenmodell, das nichtlineare Wechselwirkung berücksichtigt, zum Beispiel *WAM* [Kom94], ersetzt werden. Durch die Randsteuerung des Küstenmodells mit dem *WAM* wäre eine korrekte spektrale Energieverteilung im Küstenteil vorgegeben. Wahrscheinlich lassen sich dadurch die festgestellten Differenzen zwischen den modellierten und gemessenen Seegangsgrößen verringern. In Hinblick auf ein verbessertes Zirkulationsmodell ist primär die korrekte Modellierung der Wellen in den flachen Gebieten nahe der Küste wichtig. Dort ist der Einfluss von Seegang auf die Dynamik der mittleren Strömung am stärksten. Das auf Vorhersagen in diesem Bereich spezialisierte k -Modell wurde deshalb als Komponente des gekoppelten Modells für Seegang und Strömung ausgewählt. Unabhängig von seinem Einsatzgebiet wurden für die Source-Funktionen Parameter verwendet, die außerhalb von Küstengewässern Gültigkeit besitzen. Es wurde nicht der Versuch unternommen, die Parameter zu modifizieren und durch einen Vergleich der modellierten Größen mit Messwerten an selektiven Messpunkten zu optimieren. Dadurch würde die Aussagefähigkeit der Simulationsergebnisse auf ein Teilgebiet des Modellrasters eingegrenzt. Entweder wäre das Modell für die Vorhersage in den Küstengebieten geeignet oder könnte die Seegangsverhältnisse auf offener See wiedergeben. Eine solche Strategie kann nicht erfolgreich sein. Ein alternativer Weg ist die Verwendung unterschiedlicher Parameter-Sätze für die offene See und die Küstengebiete, wenn die Möglichkeit, *WAM* für die Nord/Ostsee einzusetzen, nicht gegeben ist. In [Sch98] werden zwei in Frage kommende Parameter-Sätze für das k -Modell von Schneggen-

⁵Die mittlere Periode T_{m1} eines Spektrums ist durch den Quotienten $T_{m1} = m_0/m_1$ gegeben. Das n -te Moment eines kontinuierlichen Spektrums $E(f)$ (Frequenz $f = \sigma/2\pi$) entspricht $m_n = \int f^n E(f) df$.

burger angegeben. Sie sind in Abschnitt 6.3 (Tabelle 6.2) aufgelistet.

Es bleibt noch anzumerken, dass die hier behandelten Fallbeispiele nicht dazu in der Lage sind, Auskunft über die Frage zu geben, ob das gekoppelte Modell die reale Dynamik des physikalischen Systems adäquat wiedergeben kann. Eine Verifikation des Modells muss auf der Basis vieler Anwendungsfälle erfolgen. Die Ergebnisse für die Sturmflut von 1999 lassen die Interpretation zu, dass eine separate Behandlung der küstennahen Gewässer mit geeigneten Parametern und Randwerten für das Wellenmodell zum Erfolg führen kann. Die Auswertung der Modellergebnisse hat gezeigt, dass die Abweichungen der simulierten Wellenhöhe und Periode T_{m1} von den Messwerten mit der Windgeschwindigkeit zunimmt und zum Höhepunkt des Sturms ihr Maximum erreicht. Dies legt den Schluss nahe, dass Sturmereignisse mit vergleichsweise geringen Windstärken (2003) durch das gekoppelte Modell besser reproduziert werden können als schwere Stürme (1999) mit großen Windstärken. Neuere Untersuchungen der Windschubspannung in tropischen Wirbelstürmen [Pow03] haben gezeigt, dass der C_D -Wert bei sehr hohen Windgeschwindigkeiten ($\underline{v}_{10} > 33 \text{ m/s}$) abnehmen kann. Dagegen wird der C_D -Koeffizient von Smith & Banke für extreme Winde zu groß. Er gilt eigentlich nur für Geschwindigkeiten kleiner als $\underline{v}_{10} = 22 \text{ m/s}$ und wurde über diesen Bereich hinaus linear extrapoliert. In den Modellergebnissen macht sich die größere Windschubspannung nach Smith & Banke als übergroße Zunahme der Wellenhöhe bemerkbar. Der starke Anstieg der modellierten Wellenhöhe zum Höhepunkt des Wintersturms „Anatol“ könnte auf diesen Sachverhalt zurückzuführen sein.

Ein weiterer Schwachpunkt ist die Feinjustierung des Wind-Antriebs im gekoppelten Modell. Beide Komponenten des Modells besitzen eine separate Formulierung der Energie- bzw. Impulszufuhr aufgrund von Wind. Das Zirkulationsmodell rechnet mit einem meteorologischen Antrieb, dessen physikalische Parameter empirisch bestimmt worden sind. Damit ist der Einfluss von Oberflächenwellen auf die mittlere Strömung bereits partiell in der Beschreibung des Wind-Antriebs enthalten. Die zusätzliche Implementierung eines Seegangmodells sorgt für eine Überbewertung des mittleren Effektes der Meereswellen auf die mittlere Strömung. Da eine Feinjustierung des gekoppelten Modells nicht Thema dieser Arbeit sein kann, wurde in den Modell-Rechnungen der ursprüngliche Windantrieb, Smith & Banke [SB75] im *BSHcmod* und Wu [Wu82] im *k*-Modell, verwendet. Im nächsten Kapitel 8 wird eine Methode beschrieben, den Input von Energie und Impuls in das Zirkulationsmodell durch den spektral integrierten Input in das Seegangmodell zu ersetzen.

Kapitel 8

Seegangabhängige Parametrisierung der Windschubspannung

8.1 Einführung in das Problem

Die bisher in dieser Arbeit präsentierten Ergebnisse beruhen auf Simulationen zweier separater Modelle, die nur über das Austauschen von Wechselwirkungs-Beiträgen miteinander gekoppelt worden sind. Im Wellenmodell werden Wasserstand und Strömung situationsabhängig variiert und im Zirkulationsmodell erhält das Geschwindigkeitsfeld der mittleren Strömung durch den Divergenzterm des Radiationstress einen zusätzlichen Antrieb. Diese Variante der Kopplung von Modell-Komponenten soll nun durch eine Version mit vereinheitlichten Windinput-Sourcetermen ersetzt werden [Abb. 8.1]. Bisher hat sich die Modellierung von Seegang und Strömung auf getrennten Wegen entwickelt. In jedem Teilbereich wurden problemspezifische Parametrisierungen des Windantriebs eingeführt. Mit der gestiegenen Leistungsfähigkeit der Computer ist es nun aber möglich, gekoppelte numerische Modelle für Seegang und Strömung zu betreiben. Die bisher verwendeten empirischen Ansätze der Windschubspannung enthalten teilweise den Einfluss von Wellen auf die zeitliche Entwicklung der Strömung. Durch die zusätzliche Kopplung der Strömungs-Komponente mit der Wellen-Komponente des Gesamtmodells entsteht eine Überbewertung der Seegangswirkung auf die Dynamik der mittleren Strömung. Eine Modifikation der einzelnen Windinput-Sourceterme ist mit erheblichem Aufwand verbunden und kann nicht Inhalt dieser Arbeit sein. Stattdessen wird der Versuch unternommen, einen einheitlichen Windinput-Sourceterm für das Gesamtmodell herzuleiten.

Es besteht kein grundsätzlicher Unterschied zwischen der Parametrisierung des Windantriebs im Seegangs- und Strömungsmodell. In beiden Fällen hängt die Windschubspannung τ von der Geschwindigkeit u_{10} des Windes in 10 Meter Höhe und dem Koeffizienten C_D ab. Im Gegensatz zu der bisher im Zirkulationsmodell verwendeten Parametrisierung von τ (Smith & Banke [SB75]) ist der neue in Kapitel 8.2 hergeleitete Ansatz seegangabhängig. Herkömmliche wellenabhängige Ansätze von Charnock [Kom94] (Kapitel 1.3.5) und Donelan [Don90] verwenden das Seegangsalter c/u_* , um die Rauheitslänge z_0 zu definieren, von der $C_D(z_0)$ abhängt. Die neue Beschreibung des meteorologischen Antriebs im Strömungsmodell verwendet die Parametrisierung des Wellenmodells [Wu82]. Es erfolgt eine Wichtung der Windschubspannung mit dem Seegangsspektrum. Die Parametrisierung der Windschubspannung im Seegangsmodell bleibt unverändert.

Die hier vorgeschlagene Sichtweise des Gesamtproblems lässt sich in folgendes Energiefluss-Schema [Abb. 8.1] zusammenfassen. Der meteorologische Input von Energie und Impuls erfolgt auf allen

relevanten räumlichen und zeitlichen Skalen des Systems. Innerhalb des komplexen physikalischen Systems laufen Prozesse auf unterschiedlichen Skalen ab, um die erhaltene Energiemenge effektiv zu dissipieren. Dabei können sich Fließgleichgewichte herausbilden, die durch eine Balance des In- und Outputs (Dissipation) gekennzeichnet sind. In dem hier präsentierten Konzept wird der Energiefluss durch den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik und das Prinzip der maximalen Entropieproduktion [Swe89] gesteuert. Mit der Komplexität des Systemzustandes Atmosphäre/Ozean nimmt die Rate zu, mit der Energie dissipiert beziehungsweise Entropie produziert wird. Da geordnete Energieflüsse die Entropie wesentlich schneller erhöhen als ungeordnete Flüsse und das Gesamtsystem sich so einstellt, dass maximale Entropieproduktion gegeben ist, wird ein Nichtgleichgewichts-System¹ stets dazu übergehen, selbstorganisiert Strukturen zu bilden, wenn es die Chance dazu besitzt. In dem hier behandelten Beispiel charakterisiert das Seegangsspektrum die entstehende Struktur. Das Prinzip der maximalen Entropieproduktion gilt generell und ist nicht auf spezielle Systemzustände wie Fließgleichgewichte eingeschränkt. In welcher Richtung sich das System entwickeln kann, wird vom zweiten Hauptsatz vorgegeben. Die Entropie des Gesamtsystems Atmosphäre/Ozean hat die Tendenz zuzunehmen. Da von allen Wechselwirkungsprozessen und damit verbundenen Zustandsänderungen der Übergang in eine Gleichgewichtskonfiguration mit der größten Entropiezunahme verbunden ist, wird das System stets dazu neigen, Gleichgewichte auszubilden. Dabei ist ein genereller Ausgleich zwischen den beiden Teilsystemen Atmosphäre und Ozean auf den von uns betrachteten zeitlichen Skalen nicht realistisch. Unter stationären Randbedingungen (Wind, Tiefe, etc.) werden sich aber Fließgleichgewichte herausbilden, die ausgereiftem Seegang entsprechen. Für die Analyse der verschiedenen In- und Output-Prozesse, die zur Erhöhung der Entropie beitragen, spielen Fließgleichgewichts-Zustände mit einer minimalen Entropie-Produktionsrate² nur eine untergeordnete Rolle.

In dem Schema [Abb. 8.1] ist eine Auswahl von Prozessen dargestellt, die im Folgenden auch als Dissipations-Kanäle oder Kanäle des Schemas bezeichnet werden. Ein Transport von Energie und Impuls zwischen den einzelnen Kanälen des Schemas findet ebenfalls statt, wenn die dissipierte Energiemenge des Gesamtsystems dadurch erhöht werden kann. Effektive Prozesse oder eine optimale Kombination effektiver Prozesse sind durch eine maximale pro Zeiteinheit dissipierte Energiemenge gekennzeichnet. Als kleinskaliger Prozess wird ausschließlich Seegang behandelt. Die mittlere Strömung, bestehend aus Euler- und Stokesdrift, bildet den zweiten, großskaligen Kanal des Schemas. Hinter dem Begriff der Effektivität steht das oben behandelte Prinzip der maximalen Entropieproduktion. Das Seegangsspektrum stellt in diesem Sinne einen Attraktor dar, der aus dem viel größeren Satz aller möglichen Spektren die aktuelle spektrale Verteilung von Seegangenergie spontan auswählt. Dies geschieht nach dem folgenden Gesichtspunkt:

Prinzip der Maximalen Entropie-Produktion [Swe89]: Unter Nichtgleichgewichtsbedingungen wird Materie spontan von derjenigen Konfiguration angezogen („attracted“) welche die Rate der Entropieproduktion pro Stoffeinheit (Mol) exponentiell erhöht. Dieser Prozess wird durch das maximale Potential der generalisierten Kräfte³ und die maximal erreichbare Anzahl von Verknüpfungen⁴ der Teilkomponenten begrenzt.

¹Der Terminus „Nichtgleichgewicht“ bezeichnet Systeme fern vom thermodynamischen Gleichgewicht. Fließgleichgewichte sind spezielle Nichtgleichgewichts-Zustände.

²Das thermodynamische Gleichgewicht besitzt maximale Entropie und minimale freie Energie. Für Fließgleichgewichte ist dies nur partiell gegeben. Diejenigen Austauschprozesse, die zur Erhöhung der Entropie beigetragen haben, sind nach Erreichen des Gleichgewichts ausgeschaltet. Deshalb besitzt das Fließgleichgewicht im Vergleich zu allen anderen Nichtgleichgewichtszuständen eine minimale Rate der Entropieproduktion. Das ist die Aussage des Prinzips der minimalen Entropieproduktion von Prigogine ([Pri77] Kap. 3.5).

³Die generalisierten Kräfte in der Bilanzgleichung des Seegangs sind die Quellen und Senken der bilanzierten Größe.

⁴Die Teilkomponenten des Seegangsspektrums sind lineare Moden der Fourier-Zerlegung. Die maximale Anzahl von Verknüpfungen wird durch die Ordnung der Störungsentwicklung festgelegt. In der Regel wird ein Quadrupol-Wechselwirkungsterm bei der Modellierung von Seegang verwendet.

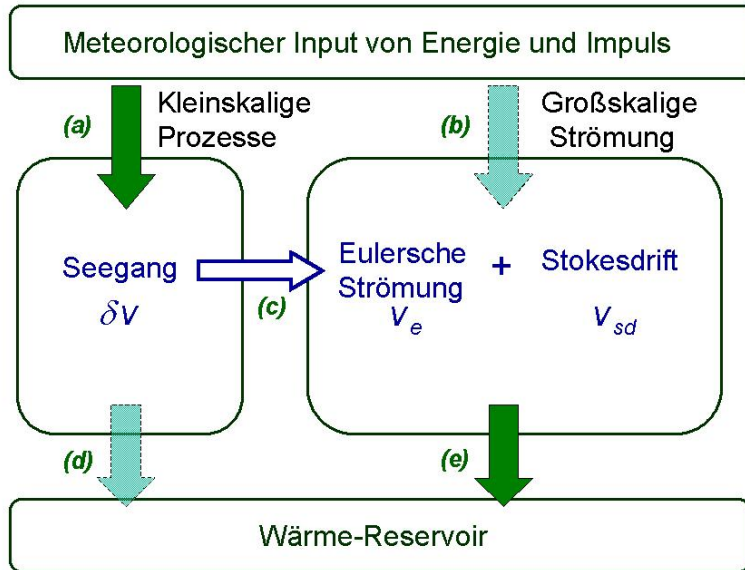


Abbildung 8.1: Energiefluss-Schema des gekoppelten Modells für Seegang und Strömung.

Das Seegangsspektrum entwickelt sich zu jedem Zeitpunkt als Resultat eines dynamischen Strukturbildungsprozesses. Ziel ist die Erhöhung der pro Zeiteinheit durch das Gesamtsystem, von der Atmosphäre zum Wärme-Reservoir transportierten Energiemenge. Dies geschieht durch Dissipation. Man spricht auch von der Umwandlung Freier Energie, die den System-Prozessen zur Verfügung steht, in Innere Energie des Wärme-Reservoirs. Die Entropie als Maß des Phasenraumvolumens⁵ ist eng mit der Dissipation Freier Energie verknüpft. Mit dem kleiner werdenden Anteil Freier Energie steigt das Volumen des Phasenraumes an und nimmt die Entropie zu. In der Regel konzentriert sich der Dissipationsmechanismus auf einige wenige Kanäle. Die Erfahrung zeigt, dass nur geringfügig effektivere Komponenten der Dissipationsstruktur überproportional viel zur Entropieproduktion beitragen. Deshalb wird bei der Modellierung physikalischer Systeme unter Nicht-Gleichgewichtsbedingungen oft nur der effektivste Dissipationsmechanismus berücksichtigt. Für das Gesamtsystem Seegang/Strömung ist die berücksichtigte Struktur der Dissipations-Kanäle durch den Input Freier Energie in die Seegangskomponente des Schemas [Abb. 8.1(links)], die Umverteilung von Energie innerhalb des Systems und den Output Innerer Energie aus der Strömungskomponente des Schemas [Abb. 8.1(rechts)] gekennzeichnet. Die anderen Kanäle (gestrichelte Pfeile) sind in der Natur auch wirksam, werden aber als weniger effektiv betrachtet und daher vernachlässigt.

In diesem Kapitel wird der Windinput-Sourcesterm unter Verwendung der nachstehenden Hypothesen hergeleitet. Seegangsfelder, die auf kurzen räumlichen und zeitlichen Skalen variieren können, sind besser dazu geeignet, Energie aus den Windfeldern aufzunehmen, als die mittlere Strömung [Abb. 8.1(a)]. Der Prozess direkten atmosphärischen Inputs von Energie in die mittlere Strömung ist nur wenig effektiv und wird im Folgenden nicht betrachtet [Abb. 8.1(b)]. Die mittlere Energiebilanz des Seegangs $\mathcal{E}_\Delta = \mathcal{E}_{in} + \mathcal{E}_{dis}$ enthält neben dem Windinput \mathcal{E}_{in} noch die dissipierte Energiemenge \mathcal{E}_{dis} und die restliche im Seegangsfeld verbleibende Energie \mathcal{E}_Δ als weitere Beiträge. Die nichtlineare Wechselwirkung der Seegangsmode führt zu einer konservativen Energieumverteilung im Spektrum und wird bei der Herleitung des Sourcesterms nicht berücksichtigt. In diesem Fall setzt sich die Netto-Sourcefunktion des Seegangs aus dem Input- und Dissipationsterm zusammen. Ein geschlossenes Gleichungssystem für die Energiebilanz des Gesamtsystems kann nur unter Kenntnis des Verhältnisses von dissipierter Energiemenge zur kanalübergreifend transportierten Energiemenge

⁵Die Entropie $S = k_B \ln \Gamma$ entspricht dem natürlichen Logarithmus des Phasenraumvolumens Γ .

abgeleitet werden. In diesem Kapitel wird von der Hypothese ausgegangen, dass es keine direkte Dissipation von Seegangenergie in das Wärmereservoir gibt [Abb. 8.1(d)]. Die gesamte pro Zeiteinheit durch den kleinskaligen Seegangskanal des Schemas geleitete Energie steht dem Eulerschen Strömungsfeld als kinetische Energie zur Verfügung. Mit der Umwandlung von Seegangenergie in Bewegungsenergie der Eulerschen Strömung steht ein Input von Impuls in die Strömungskomponente des Schemas in Verbindung [Abb. 8.1(c)]. Der restliche im Seegangsfeld verbleibende mittlere Impuls entspricht der Stokesdrift. Die großskalige Strömung setzt sich aus der Stokesdrift ($\sim \mathcal{E}_\Delta$) und der Eulerschen Strömung ($\sim \mathcal{E}_{dis}$) zusammen. In Kurzform zusammengetragen sind die Voraussetzungen für die Herleitung des Windinput-Sourceterms:

- (1.) Der mittlere Impuls des Seegangs entspricht der Stokesdrift
- (2.) Seegangenergie wird in Bewegungsenergie der Eulerschen Strömung umgewandelt. Die pro Zeiteinheit an die Eulersche Strömung abgegebene Energiemenge entspricht der dissipierten Seegangenergie des kanonischen Modells.
- (3.) Die Summe der Sourceterme des Seegangmodells enthält keinen Beitrag der nichtlinearen Wechselwirkung von Seegangsmoden. Nur atmosphärischer Input von Energie und Dissipation werden berücksichtigt.

$$S_{in} = S_{tot} - S_{dis}$$

Wie sieht nun das Energiefluss-Schema des numerischen Modells aus? Das Strömungsmodell als Teilkomponente des gekoppelten Modells berechnet zu jedem Zeitpunkt die mittlere Geschwindigkeit der Strömung, bestehend aus Euler- und Stokesdrift. Daneben existiert noch ein spektrales Modell für Seegang. Der meteorologische Input von Energie generiert Seegang. Im großskaligen Modell der mittleren Strömung entspricht der vorhandene Seegang einem Anteil des Strömungsfeldes, der Stokesdrift. Deshalb ist mit dem Input von Windenergie (beziehungsweise Impuls) in den Seegang ein entsprechender Input in die mittlere Strömung verbunden. Auf den zeitlichen Skalen des Zirkulationsmodells betrachtet, ist Seegang ein Input-Mechanismus für Energie und Impuls der mittleren Strömung. Ein seegangsabhängiger Windinput-Sourceterm für das großskalige Strömungsmodell wird im nächsten Abschnitt (8.2) hergeleitet. Er basiert auf den Überlegungen des vorigen Absatzes und dem Flussschema [Abb. 8.1].

8.2 Der Impuls-Quellterm in der Bilanzgleichung der mittleren Strömung.

In Kapitel 3 wurde die Dynamik von Störungen untersucht die der Lösung des nicht-kanonischen Lie-Poisson-Systems (3.2) (mit $\mu = \mu_e$) aufgeprägt waren. Nach Voraussetzung ist die Gleichgewichtslösung μ_e nur langsam veränderlich in der Zeit. Die zeitliche Entwicklung der Störung wird durch die adiabatische Invarianz der Größe Wellenwirkung kontrolliert. Als Phasenraumintegral ist sie nach Liouville's Theorem eine Erhaltungsgröße. Zeittransformationen können nur die Form aber nicht das Volumen einer Phasenraumzelle ändern. Solche Systeme wurden bisher ausschließlich behandelt. In diesem Kapitel wird der Spezialfall auf Systeme verallgemeinert deren Phasenraumvolumen sich so schnell ändern kann das I_k keine adiabatische Invariante mehr ist, aber immer noch gewährleistet bleibt das $\sum_j Q_{I_j} = Q_{tot,I} = O(\varepsilon)$. Für diesen Fall ist es möglich folgende approximative Erhaltungsgleichung für die Größe Wellenwirkung $I_k = E(\underline{k})/\sigma$ herzuleiten ($\dot{\underline{x}} = \nabla_{\underline{k}}\Omega$,

$$\dot{\underline{k}} = -\nabla_{\underline{X}}\Omega).$$

$$\frac{dI_k}{dT} = \frac{\partial I_k}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial X_i} (\nabla_{k_i}\Omega I_k) - \frac{\partial}{\partial k_i} (\nabla_{X_i}\Omega I_k) = Q_{tot,I} = O(\varepsilon) \quad (8.1)$$

Alternativ zum Hamiltonfunktional H kann die Wellenwirkung I_k dazu benutzt werden die Invarianten der Bewegung zu bestimmen (Noether-Theorem). Translationsinvarianz von I_k in Richtung \underline{k} gebietet zum Beispiel Erhaltung des Wellenimpulses $d(\underline{k}I_k)/dt = 0$.

Da der Wellenimpuls $=: \underline{M}^w$ mit der Stokesdrift $\rho_w \underline{v}_{sd}(Z) = \langle \rho_w \delta \underline{v}(Z) \rangle$ identifiziert werden kann wird der seegangsinduzierte Anteil der mittleren Strömung (Stokesdrift) durch den Netto-Sourcesterm $Q_{tot,I}$ in der Wirkungsbilanzgleichung (8.1) entweder beschleunigt oder gebremst, je nach Vorzeichen von $Q_{tot,I}$. Die totale Zeitableitung des Wellenimpuls \underline{M}^w (8.6) ist über die Energie-Impulsbeziehung (8.2) mit der totalen Zeitableitung der Seegangsenergie verbunden und entspricht dem Integral (8.6) des Netto-Sourcesterm $Q_{tot,I}$. Der Wellenimpuls \underline{M}^w ist gleich

$$\underline{M}^w = \int_{\underline{k}} \underline{k} \rho_w \frac{E(\underline{k}, \zeta)}{\sigma_k} d\underline{k} = \int_{\underline{k}} \underline{k} \rho_w \frac{E(\underline{k})}{\sigma_k} \frac{2k \cosh 2kh_e(1 + \zeta)}{\sinh 2kh_e} d\underline{k} \stackrel{!}{=} \rho_w \underline{v}_{sd}(\zeta). \quad (8.2)$$

In Gleichung (8.2) entspricht die Wirkungsvariable I_k der phasengemittelten spektralen Energiedichte $E(\underline{k}, Z)$ geteilt durch die intrinsische Frequenz σ_k . Das zweite Gleichheitszeichen folgt aus der Beziehung (8.5) $E(\underline{k}, 0) = 2k E(\underline{k})/\tanh(2kh)$, für dessen Herleitung Gleichung (8.3) und (8.4) benötigt werden. Die Gleichung (8.3) beschreibt die Skalierung der Seegangsenergie $\tilde{E}(\underline{k}, \zeta)$ mit der Vertikal-Koordinate ζ . In dieser Gleichung kennzeichnet \mathcal{E} das Amplitudenquadrat $a^{(1)}(a^{(1)})^*$.

$$\tilde{E}(\underline{k}, \zeta) = \left\langle |\delta^{(1)} \underline{v}|^2 + |\delta^{(1)} \underline{w}|^2 \right\rangle = \frac{\sigma^2 \mathcal{E}}{2} \frac{\cosh 2kh}{\sinh^2 kh_e} \frac{\cosh 2kh_e(1 + \zeta)}{\cosh 2kh_e} = \tilde{E}(\underline{k}, 0) \frac{\cosh 2kh_e(1 + \zeta)}{\cosh 2kh_e} \quad (8.3)$$

Bei der Herleitung von (8.3) wurde der Ansatz linearer Wellen für die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors $\delta^{(1)} \underline{v}(\underline{Z})$ und $\delta^{(1)} \underline{w}$ (Gleichung (4.54) und (4.55)) eingeführt. Nach Integration über Vertikal-Koordinate $\zeta = z/h_e$, vom Boden $s(\zeta_1) = -h$ bis zur Oberfläche $s(\zeta_2) = 0$, erhält man das folgende Resultat

$$\tilde{E}(\underline{k}) = \int_{s(\zeta_1)}^{s(\zeta_2)} \tilde{E}(\underline{k}, Z) dz = \int_{\zeta_1=-1}^{\zeta_2=0} \tilde{E}(\underline{k}, 0) \frac{\cosh 2kh_e(1 + \zeta)}{\cosh 2kh_e} d\zeta = \tilde{E}(\underline{k}, 0) \frac{\tanh 2kh_e}{2k}. \quad (8.4)$$

Für eine kontinuierliche Verteilung der Energie $\tilde{E}(\underline{k}, \zeta)$ im Spektralraum ist die spektrale Energiedichte $E(\underline{k}, \zeta)$ durch die Ableitung $E(\underline{k}, \zeta) = d\tilde{E}(\underline{k}, \zeta)/dk$ gegeben. Dann ist $E(\underline{k}, \zeta)$ eine kontinuierlich über den Spektralraum verteilte Energiedichte. Sie skaliert sich mit der Tiefe wie die Energie einer Seegangsmode. Aus Gleichung (8.3) und (8.4) folgt die Beziehung (8.5) für die totale Seegangsenergie.

$$\begin{aligned} \int d\tilde{E}(\underline{k}, \zeta) &= \int_{\underline{k}} \frac{d\tilde{E}(\underline{k}, \zeta)}{dk} d\underline{k} = \int_{\underline{k}} \frac{d\tilde{E}(\underline{k})}{dk} \frac{2k \cosh 2kh_e(1 + \zeta)}{\tanh 2kh_e \cosh 2kh_e} d\underline{k} \\ &= \int_{\underline{k}} E(\underline{k}, \zeta) d\underline{k} = \int_{\underline{k}} E(\underline{k}) \frac{2k \cosh 2kh_e(1 + \zeta)}{\sinh 2kh_e} d\underline{k} \end{aligned} \quad (8.5)$$

Letztendlich erhält man für die totale Zeitableitung der Stokesdrift an der ζ -Oberfläche nach Einsetzen der Energiebilanzgleichung des Seegangs $dE(\underline{k}, \zeta)/dT = Q_{tot,E}$ in Gleichung (8.2) den folgenden Ausdruck.

$$\rho_w \frac{d\underline{v}_{sd}}{dT} \stackrel{!}{=} \frac{d\underline{M}^w}{dT} = \int_{\underline{k}} \underline{k} \rho_w \frac{d}{dT} \left(\frac{E(\underline{k}, \zeta)}{\sigma_k} \right) d\underline{k} = \int_{\underline{k}} 2k \underline{k} \rho_w \frac{Q_{tot,E}(\underline{k})}{\sigma_k} \frac{\cosh 2kh_e(1 + \zeta)}{\cosh 2kh_e} d\underline{k} \quad (8.6)$$

Gemäß der Energie-Impuls Beziehung (8.2) ändert sich der Betrag von Stokes- und Eulerdrift mit der Vertikal-Koordinate ζ wie die Energie des Seegangs. Gleichung (8.8) folgt aus der im Abschnitt 8.1 diskutierten Hypothese (2.). Die gesamte dissipierte Seegangsenergie steht der Eulerschen Strömung als kinetische Energie zur Verfügung. Deshalb ist die totale Zeitableitung der Eulerschen Strömung proportional zur Dissipations-Sourcefunktion Q_{dis} in der Energiebilanz des Seegangs. Unter dieser Voraussetzung ist die totale Zeitableitung der mittleren Strömungsgeschwindigkeit $\langle \underline{v} \rangle = \underline{v}_e + \underline{v}_{sd}$ gleich der Summe von (8.7) und (8.8).

$$\rho_w \frac{d\underline{v}_{sd}}{dT} = \int_k 2k \underline{k} \rho_w \frac{Q_{tot,E}(k)}{\sigma_k} \frac{\cosh 2kh_e(1+\zeta)}{\sinh 2kh_e} dk \quad (8.7)$$

$$\rho_w \frac{d\underline{v}_e}{dT} = - \int_k 2k \underline{k} \rho_w \frac{Q_{dis,E}(k)}{\sigma_k} \frac{\cosh 2kh_e(1+\zeta)}{\sinh 2kh_e} dk \quad (8.8)$$

Die nichtlineare Wechselwirkung von Seegangsmoden wird bei der Berechnung des Windinputs vernachlässigt (Hypothese (3.)). Diese Voraussetzung ist sicherlich nur in erster Näherung gegeben. Dann kann aber $Q_{in} \approx Q_{tot} - Q_{dis}$ gesetzt werden und der Impuls-Quellterm für die mittlere Strömung $\langle \underline{v} \rangle$ ist gleich

$$\rho_w \frac{d\langle \underline{v} \rangle}{dT} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ \int_k \rho_w \underline{k} Q_{in,I}(k) \frac{\sinh 2kh_e(1+\zeta)}{\sinh 2kh_e} dk \right\} = \frac{\partial \tau_{i\zeta}}{\partial \zeta}. \quad (8.9)$$

Wenn Hypothese (3.) nicht gegeben ist und der Netto-Sourceterm Q_{tot} außer $Q_{in} + Q_{dis}$ noch den nichtlinearen Beitrag Q_{nl} der Wechselwirkung von Seegangsmoden enthält, dann muss der Term Q_{in} in Gleichung (8.9) durch $Q_{in} + Q_{nl}$ ersetzt werden. Das ändert allerdings nichts daran, dass der gesamte, spektral integrierte Windinput des Seegangs als meteorologischen Antrieb der Strömung in das Gesamtsystem eingeht. Der Unterschied zu dem durch Gleichung (8.9) beschriebenen System besteht in der Modifikation des Beitrags einzelner Moden zum Windantrieb der Strömung durch den konservativen Energieaustausch Q_{nl} .

Die rechte Seite von Gleichung (8.9) ist in Fluss-Form, als Divergenz des Tensors $\tau_{i\zeta}$ in den geschweiften Klammern, umgeschrieben worden. Außerdem wurde der Sourceterm $Q_{in,E}$ der Energiebilanz des Seegangs durch den entsprechenden Sourceterm der Wirkungsbilanz (8.1) $Q_{in,I} = Q_{in,E}/\sigma_k$ ersetzt. Oft identifiziert man die Wellenenergie \tilde{E} mit dem Amplitudenquadrat $\mathcal{E} = a^{(1)}(a^{(1)})^*$. Dann muss $Q_{in,I}$ in Gleichung (8.9) durch $g Q_{in,I}^{mod}$ ersetzt werden. Anhand der Einheiten lässt sich leicht nachprüfen, dass $g Q_{in,I}^{mod}$ in (8.10) eine Wirkungsrate pro Flächenelement ist.

$$\rho_w \frac{d\langle \underline{v} \rangle}{dT} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ \int_k \rho_w g \underline{k} Q_{in,I}^{mod}(k) \frac{\sinh 2kh_e(1+\zeta)}{\sinh 2kh_e} dk \right\} \quad (8.10)$$

Im nächsten Abschnitt werden die Ergebnisse von Modellläufen analysiert, die Formulierung (8.10) des meteorologischen Antriebs der großskaligen Strömung verwenden.

8.3 Simulationsergebnisse

In diesem Kapitel werden Simulationsergebnisse eines vollständig gekoppelten Modells für Seegang und Strömung präsentiert. Beide Modell-Komponenten wechselwirken auf unterschiedliche Art und Weise miteinander. Wie in Kapitel 7 erfolgt die Refraktion und Propagation der Wellen aufgrund variabler Strömungs- und Tiefenfelder, die ständig aktualisiert werden. Auch der Beitrag des Radiationstress-Tensors in den Bilanzgleichungen der mittleren Strömung wurde bereits in Kapitel 7 berücksichtigt. Neu ist die seegangsabhängige Formulierung der Windschubspannung (8.9) im Zirkulationsmodell. Die Parametrisierung des Windinputs im Wellenmodell bleibt unverändert. Auch der in beiden Modellen verwendete Mechanismus für die Dissipation von Seegangenergie und Strömungsimpuls ist nicht geändert worden. Energiedissipation im Seegangmodell interessiert uns nur in Hinblick auf eine korrekte Modellierung des Wellenspektrums. Der Input dissipierter Seegangenergie in die Energiebilanz der Eulerschen Strömung wird nicht betrachtet. Das gekoppelte Modell behandelt ausschließlich mittlere Strömungsgrößen. Daher beschränkt sich die Modifikation des Modells auf die Verwendung der seegangsabhängigen Parametrisierung der Windschubspannung $\tau_i^w = \partial_\zeta \tau_i \zeta$ (8.10). Wie bei der bisherigen Variante der Windschubspannung $\tau_i^{S\&B}$ wird sie als Randwert an der Oberfläche in das Strömungsmodell eingegeben.

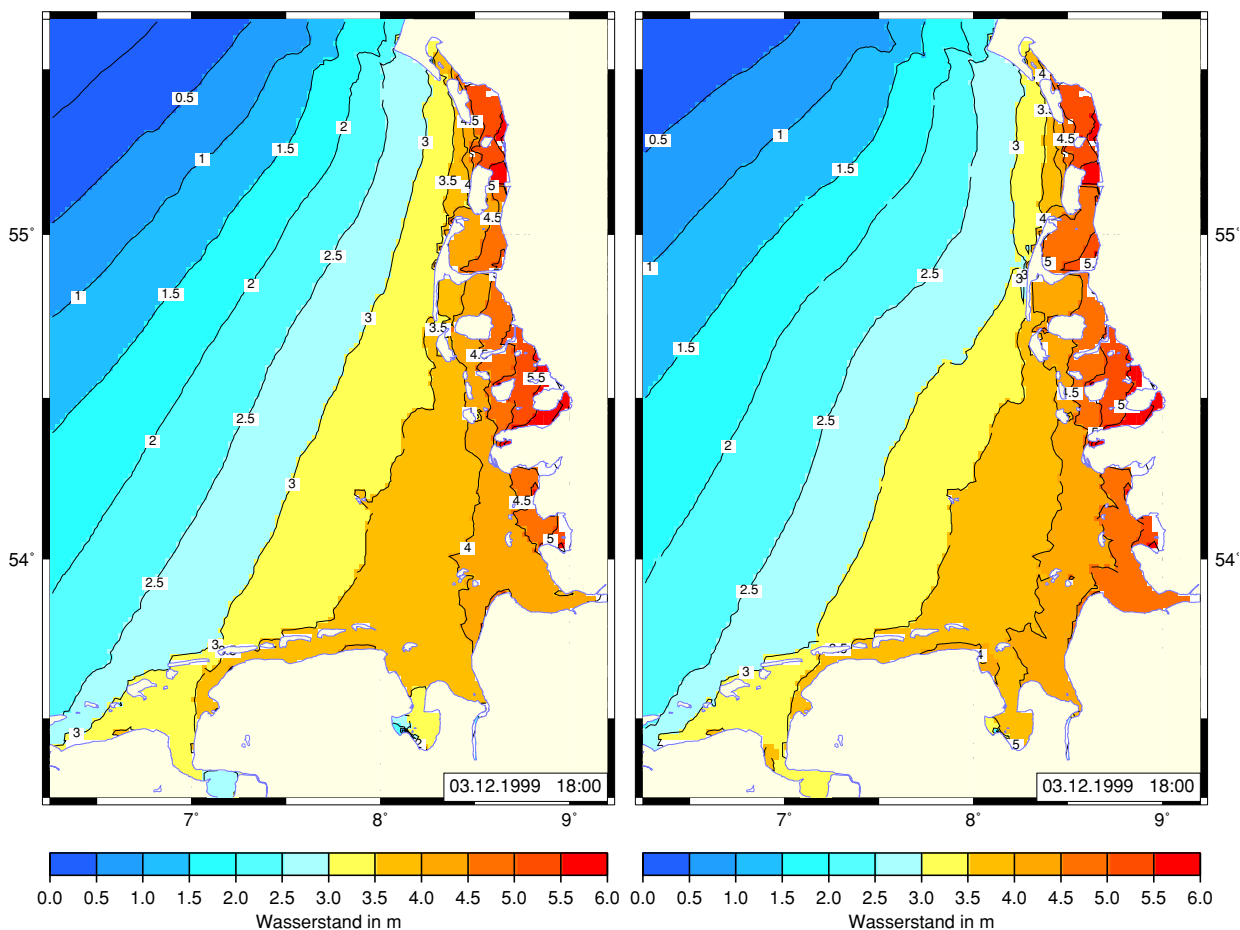


Abbildung 8.2: Räumliche Verteilung des Wasserstandes in der Deutschen Bucht zum Zeitpunkt 18.00 Uhr am 03.12.1999. Links: Ergebnis des vollständig gekoppelten Modells unter Verwendung des Windschubspannungsansatz $\tau_i^{S\&B}$ (Smith & Banke). Rechts: Simulationsergebnis des gekoppelten Modells mit dem Ansatz τ_i^w/f_τ aus Kap. 8.2. Der skalare Faktor f_τ ist gleich 2.8 (Fußnote 7).

Als Anwendungsbeispiel für einen Vergleich der Simulationsergebnisse wird die in Kapitel 7.3.1 behandelte Sturmflut vom 2. bis 4. Dezembers 1999 herangezogen. Die zeitliche Entwicklung des Sturmtiefs „Anatol“ und seine Auswirkungen auf die Dynamik der modellierten Wasserstände, Strömungsgeschwindigkeiten und Wellenhöhen wurde bereits in Kapitel 7.3.1 besprochen. Nun erfolgt eine Gegenüberstellung der Ergebnisse zweier Modellläufe mit unterschiedlichen Parametrisierungen der Windschubspannung. Der Parameter Wasserstand wird als Indikator für den Einfluss des neuen Input-Mechanismus auf die Modellergebnisse verwendet. In Abbildung [8.2] ist die räumliche Verteilung des Wasserstandes zum Zeitpunkt 18:00 Uhr am 03.12.1999 dargestellt. Die Ergebnisse einer windabhängigen Parametrisierung der Windschubspannung $\tau_i^{S\&B}$ (links) werden den Resultaten einer seegangabhängigen Formulierung τ_i^w (rechts) gegenübergestellt. In der äußeren Deutschen Bucht gibt es kaum Unterschiede zwischen den beiden Modellläufen. Mit abnehmender Distanz zu den flachen Küstengebieten werden die Differenzen aber größer. Im Wesentlichen beschränken sie sich auf eine Wasserstandserhöhung in der Elbmündung und eine Reduzierung des Wasserstandes bei Sylt. Die Strukturen der dargestellten Wasserstandsverteilungen [Abb. 8.2] sind aber im Wesentlichen gleich. Ursache dafür ist die prinzipielle Ähnlichkeit der räumlichen Verteilung von mittlerer Wind- und Seegangenergie. Außerdem ist die mittlere Propagationsrichtung der Wellen oft durch die Windsee vorgegeben und entspricht in den überwiegenden Fällen der Windrichtung. Eine völlige Übereinstimmung der Modellergebnisse ist aber nicht zu erwarten. Neben den atmosphärischen Einflüssen bestimmen noch Umgebungsvariablen, wie die Topographie des Gebietes und die Struktur des Strömungsfeldes, den Seegang. Außerdem benötigen die Wellen eine bestimmte Windlauflänge (Fetch) um repräsentativ für das vorhandene Windfeld zu sein. Der Einfluss des Fetch führt in Abbildung [8.4] zu einer Verringerung des dargestellten Verhältnis, $|\tau_i^w|$ zu $|\tau_i^{S\&B}|$, an der englischen und norwegischen Küste.

Der Einfluss der Topographie wird bei einem Vergleich der beiden Abbildungen [8.3] deutlich. Sie zeigen eine Gegenüberstellung der Pegelkurven von Cuxhaven (links) und Husum (rechts) mit den modellierten Zeitserien des Wasserstandes an diesen Orten. Im nordfriesischen Wattenmeer (Husum) ist zum Zeitpunkt des maximalen Hochwassers 03.12.1999 um 18:00 Uhr [Abb. 8.2] die Differenz zwischen den vier Kurven wesentlich größer als bei Cuxhaven. Der Einfluss des Seegangs führt zu sichtbaren Unterschieden im Wasserstand. Während des Sturms zeigt ein Vergleich der Ergebnisse des gekoppelten Modells (rot, grün) höhere Werte der Simulation mit dem Windschubspannungs-Ansatz von Smith & Banke (rot). Zum Zeitpunkt des maximalen Hochwassers ist der modellierte Wert bei Cuxhaven etwa 40 cm größer als der simulierte Wasserstand mit dem seegangabhängigen Ansatz τ_i^w (grün). Wie im Einstieg 8.1 zu diesem Kapitel besprochen worden ist, folgt aus der Verwendung

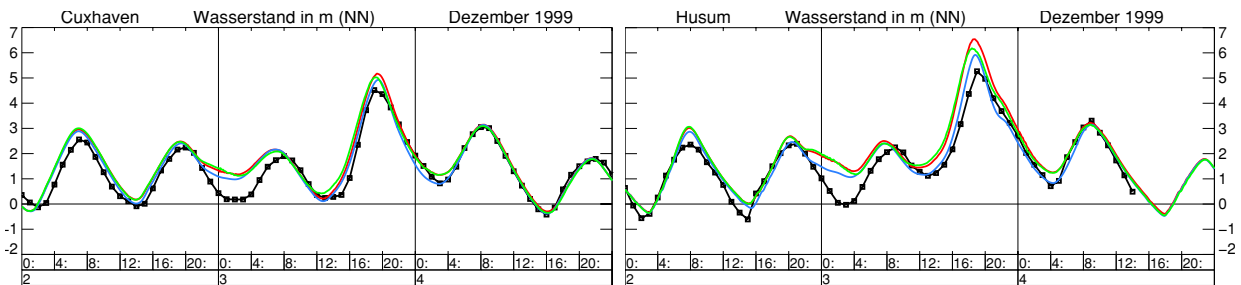


Abbildung 8.3: Vergleich der Pegelkurven (schwarz) mit den modellierten Wasserständen: BSH-Zirkulationsmodell (blau: $\tau_i^{S\&B}$), Gekoppeltes Modell für Seegang und Strömung (rot: $\tau_i^{S\&B}$, grün: τ_i^w) für den Zeitraum 02.12.1999 00:00 Uhr bis 04.12.1999 24:00 Uhr in Cuxhaven (links) und Husum (rechts). Die rote und blaue Kurve ist das Ergebnis einer Rechnung mit dem Ansatz $\tau_i^{S\&B}$ (Smith & Banke). Die grüne Kurve ist das Ergebnis einer Rechnung mit τ_i^w/f_τ (Kap. 8.2). Der Faktor f_τ ist gleich 2.8 (Fußnote 7).

des empirischen Ansatzes⁶ $\tau_i^{S\&B}$ in einem gekoppelten Modell die Überbewertung des Welleneinfluss auf die Dynamik der mittleren Strömung. Dahingegen führt eine seegangsabhängige Formulierung der Windschubspannung (grün) zu einem niedrigeren maximalen Wasserstand an beiden Orten. Wie aus Abbildung [8.3] ersichtlich ist tritt das maximale Hochwasser auch etwas früher ein. Die zeitliche Verschiebung könnte folgende Ursache haben. Aufgrund des Wind- und Brandungsstau nimmt der Wasserstand in der Deutschen Bucht zu. Damit ist ein Anwachsen der Wellenhöhe verbunden, was auf verringerte Dissipation spektral verteilter Seegangsenergie zurückzuführen ist. Dadurch nimmt der Betrag der seegangsabhängigen Windschubspannung τ_i^w zu, was eine zusätzliche Wasserstandserhöhung zur Folge hat. Auf diese Weise verstärkt sich der Prozess solange kein Gleichgewicht zwischen wind- und seegangsinduzierter Beschleunigung der Wassermasse und rücktreibender Kraft der aufgestauten Wassermenge erreicht ist. Warum aber ist der maximale Wasserstand mit dem wellenabhängigen Ansatz τ_i^w kleiner als der entsprechende Wert mit dem Ansatz $\tau_i^{S\&B}$. Die Formulierung der Windschubspannung nach Smith & Banke hängt quadratisch von der Windgeschwindigkeit

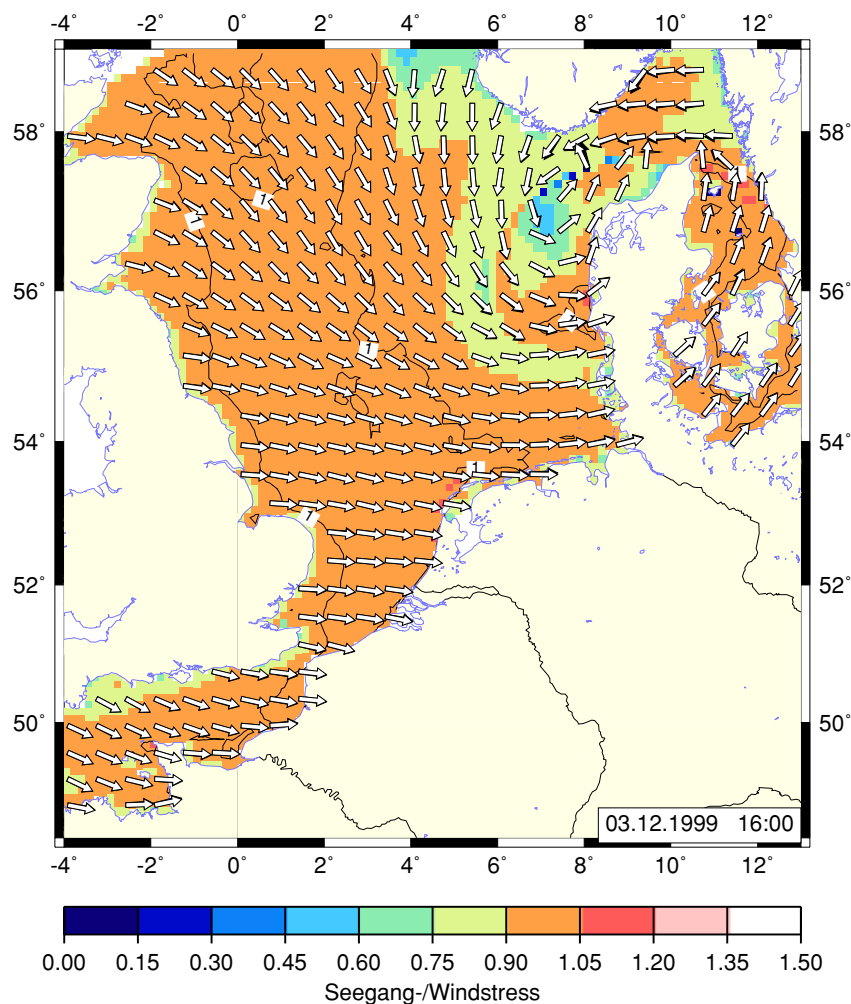


Abbildung 8.4: Räumliche Verteilung des normierten Verhältnisses der Windschubspannung $\tau_i^{S\&B}$ nach Smith & Banke [SB75] und der seegangsabhängigen Windschubspannung aus Kapitel 8.2 $\tau_i^w = \partial\tau_{i\zeta}/\partial\zeta$. Dargestellt ist der Quotient $|\tau_i^w|/|\tau_i^{S\&B}|$ geteilt durch den Faktor 2.8 (Fußnote 7). Zeitpunkt 18.00 Uhr am 03.12.1999. Die schwarzen ($\tau_i^{S\&B}$) und weißen Pfeile (τ_i^w) zeigen in Richtung der Windschubspannung.

⁶Die bisher verwendeten empirischen Ansätze der Windschubspannung enthalten teilweise den Einfluss von Wellen auf die zeitliche Entwicklung der Strömung.

v_{10} ab. Dahingegen ist der Windinput-Sourceterm des k -Modells, vom Einfluss der Bögigkeit einmal abgesehen, proportional zu v_{10} . Während des Sturms steigt die Windgeschwindigkeit auf mehr als 40 m/s in der Deutschen Bucht an. Im Vergleich mit der seegangabhängigen Formulierung τ_i^w kann dies zu höheren Werten der Schubspannung $\tau_i^{S\&B}$ führen. Dahingegen stimmen die beiden Kurven des gekoppelten Modells (rot, grün) nahezu überein, wenn die Geschwindigkeit des Windfeldes einen Grenzwert nicht überschreitet. Von der zweiten Tageshälfte des 3. Dezembers einmal abgesehen ist das praktisch immer der Fall.

Die hier vorgestellte Interpretation der Modellphysik erklärt die Simulationsergebnisse. Es wurden aber nur Rechnungen für eine einzige Wetterlage ausgewertet. Andere Szenarien sind nicht betrachtet worden. Bevor der neue Windschubspannungs-Ansatz in einem gekoppelten Modell für Seegang und Strömung implementiert werden kann, müssen noch detaillierte Fallstudien durchgeführt werden. Das kann aber nicht Inhalt dieser Arbeit sein. Stattdessen wird untersucht, wo ein Wechsel der Parametrisierung von τ zu signifikanten Unterschieden in den Modellergebnissen führt. In Abbildung [8.4] ist das Verhältnis der Windschubspannung $\tau_i^{S\&B}$ nach Smith & Banke [SB75] zu der, in Abschnitt 8.2 hergeleiteten Formulierung der Windschubspannung $\tau_i^w = \partial_\zeta \tau_{i\zeta}$ (8.9) dargestellt. An jedem Raumpunkt wird der Betrag von τ_i^w durch den Betrag von $\tau_i^{S\&B}$ geteilt. Aufgrund des hohen C_D -Wertes im Windinput-Sourceterm des k -Modells muss der Betragswert von τ_i^w durch den Faktor⁷ $f_\tau = 2.8$ geteilt werden. Die schwarzen ($\tau_i^{S\&B}$) und weißen Pfeile (τ_i^w) in Abbildung [8.4] zeigen in Richtung der Windschubspannung. Sie sind nahezu deckungsgleich. Nur in Küstennähe kann es zu leichten Richtungsänderungen kommen. Dort unterscheiden sich die dargestellten Beträge von τ zum Teil erheblich. Vor allem im Windschatten der englischen und norwegischen Küste ist eine deutliche Differenz des Betragsverhältnis von maximal -0.3 erkennbar. In Propagationsrichtung der Wellen können die Beträge von τ_i^w an der Küste auch größer als die Beträge des herkömmlichen Windschubspannungs-Ansatzes $\tau_i^{S\&B}$ sein. An der Niederländischen Küste und im Kattegat zeigt Abbildung [8.4] erhöhte Werte des Betragsverhältnisses von bis zu $+0.3$. In den übrigen Bereichen der Nordsee, des Skagerrak und Kattegatt ist das dargestellte Verhältnis nahezu 1.0. Davon ausgeschlossen sind Bereiche im Inneren des Tiefdruckwirbels östlich von Jütland und dem Gebiet maximaler Windgeschwindigkeit in [Abb. 7.9]. Dieser Bereich umschließt das Zentrum des Tiefs und zieht sich in einem schmalen Streifen von der Südküste Norwegens über die Fischerbank bis nach Sylt. Dort ist die Windgeschwindigkeit und damit auch $|\tau_i^{S\&B}|$ hoch. Vermutlich konnte sich der Seegang noch nicht an die gegebene Windsituation anpassen. Deshalb ist der Betrag von $|\tau_i^w/f_\tau|$ kleiner als der entsprechende Wert von $\tau_i^{S\&B}$ nach Smith & Banke.

Zusammenfassen lässt sich sagen, dass die Beschaffenheit des Wellenfeldes dazu geeignet ist den atmosphärischen Input von Energie und Impuls in das Strömungsmodell zu beschreiben. Besonders für ein gekoppeltes Modell mit verschalteten Seegangs- und Strömungskomponenten ist dies zutreffend. In den Kapiteln 7.2 und 7.3 wurde angemerkt dass die Verwendung empirischer Ansätze $\tau_i^{S\&B}$ in einem gekoppelten Modell zu unverhältnismäßig hohen Wasserständen führen kann. Der neue, in diesem Kapitel vorgestellte Ansatz τ_i^w scheint diesen Fehler zu verringern. Bis jetzt sind aber noch

⁷ In [Sch97] erklärt Schneggenburger, dass die spektrale Balance des k -Modells an dem analytisch lösbaren Fall eines räumlich homogenen Systems mit einem konstanten Windfeld und einem eindimensionalen Spektrum geeicht worden ist. Aus einem Vergleich $f_{PM} = f_P$ der ermittelten Peakfrequenz $f_P = 0.22 g/28v_*$ mit der Peakfrequenz des Pierson-Moskowitz Spektrums $f_{PM} = 0.13 g/v_{10}$ ergibt sich das folgende Verhältnis der Reibungsgeschwindigkeit v_* zur Windgeschwindigkeit v_{10} in 10 m Höhe $v_*^2 = 0.0036 v_{10}^2$. Der Wert des C_D -Koeffizient 0.0036 ist verglichen mit den üblichen Werten um etwa den Faktor 3 zu Hoch. Das Zirkulationsmodell verwendet ebenfalls eine, von v_{10} abhängige Parametrisierung der Windschubspannung [SB75]. Für einen moderaten Wind von $v_{10} = 8.6 m/s$ ist der verwendete C_D -Wert $(0.63 + 0.066 v_{10}/(m/s)) \cdot 10^{-3}$ um etwa den Faktor $f_\tau = 3$ kleiner als der entsprechende Wert des k -Modells. Der Betrag von f_τ variiert in Abhängigkeit von den lokalen Gegebenheiten wie Wassertiefe und Strömungsgeschwindigkeit, da das Seegangfeld von diesen Umgebungsvariablen abhängt. Der Faktor f_τ wurde so bestimmt, dass am Basispunkt \underline{x}_b in der Mitte der Nordsee das Verhältnis der beiden Beträge $|\tau_i^w(\underline{x}_b)|$ und $|\tau_i^{S\&B}(\underline{x}_b)|$ gleich Eins ist. Der Wert von $f_\tau = 2.8$ ist nahezu konstant und auch unabhängig von der Windgeschwindigkeit. Wie der Anteil der Windsee am Seegang hängt f_τ von der Windrichtung ab.

nicht genügend Modellstudien durchgeführt worden, um diesbezüglich wirklich zu klaren Aussagen zu kommen. Darüber hinaus besteht Klärungsbedarf in der Frage ob die C_D -Parametrisierung des k -Modells an die Gegebenheiten in einem gekoppelten Modell für Seegang und Strömung angepasst werden muss. Bis jetzt wurde eine Ad hoc Justierung der Windschubspannung durchgeführt und ein skalarer Faktor $f_\tau = 2.8$ eingeführt (Fußnote 7). Eine Reskalierung des Input-Sourceterm würde eine Neubewertung sämtlicher Sourceterme des k -Modells zur Folge haben. Das kann nicht Gegenstand dieser Arbeit sein.

Kapitel 9

Zusammenfassung

Wenn Wind über Wasser streift, wird aufgrund der mechanischen Wechselwirkung mit der Meeresoberfläche kinetische Energie und Impuls in den Wasserkörper induziert. Im Skalenbereich der modellierten Hydrodynamik macht sich dies als messbare Strömung $\langle \underline{v} \rangle$, Wasserstandserhöhung $\langle h \rangle$ und Seegang $(\delta h, \delta \underline{v})$ bemerkbar. Ohne die Viskosität des Mediums und die damit verbundene Energie-Dissipation innerhalb der Wassersäule zu berücksichtigen, kann die Eulersche Strömung instabil gegenüber infinitesimal kleinen Störungen sein. Wenn der Dichtegradient über eine Sprungschicht¹ hinweg groß genug wird, wachsen die Störungen (Wellen) dann unbegrenzt an [Ab86]. Im allgemeineren Fall dissipativer Systeme ist die maximale Amplitude der generierten Wellen begrenzt. Durch Dissipation wird Energie des Subsystems Seegang an die Eulersche Strömung abgegeben. Des Weiteren tragen residuale Seegangseffekte zur mittleren Strömung bei. Die Dynamik der verschiedenen Prozesse Seegang und Strömung kann nicht unabhängig voneinander betrachtet werden. Aufgrund ihrer nichtlinearen Wechselwirkung kommt es zu einer strömungsbedingten Änderung des Seegangsimpulses (Refraktion) und zu einem zusätzlichen Massenfluss im Meer.

Nach dem Theorem der maximalen Entropie-Produktion stellt sich das Gesamtsystem Atmosphäre/Ozean zu jedem Zeitpunkt so ein, dass die Rate, mit der Input-Energie dissipiert wird, maximal ist (Prinzip der maximalen Entropie-Produktion). Da der Übergang in einen Gleichgewichtszustand mit der größten Entropiezunahme verbunden ist, entwickelt sich der Ozean unter dem Einfluss meteorologisch stabiler Verhältnisse zu einem stationären Zustand hin. Sowohl die räumliche und spektrale Energieverteilung des Seegangs als auch die mittlere Strömung werden stationär. Wenn die meteorologischen Verhältnisse sich ändern (z.B. auffrischender Wind oder Winddrehung), stellen sich die dynamischen Prozesse entsprechend ihrer typischen Skalen auf die neue Situation ein. Das Gesamtsystem versucht einen neuen stationären Zustand zu erreichen. Im gekoppelten Modell für Seegang und Strömung reagiert das System zunächst auf den Skalen der Wellen. Die zusätzliche Energie wird so schnell wie möglich durch das System transportiert, um auf allen Skalen effektiv dissipiert zu werden. In einer skalenzerlegten Betrachtung der physikalischen Prozesse führt dies zu dem Bild vom Seegang als Steuerprozess der mittleren Strömung². Der Netto-Energietransport vom Seegang zur Strömung führt zu einem zusätzlichen eulerschen Massenfluss. Darüber hinaus treibt der phasengemittelte Seegang die mittlere Strömung an. Der spektral integrierten Wellenenergie kann aufgrund der Energie-Impuls-Beziehung die Stokesdrift zugeordnet werden. Auf diese Weise beeinflusst die Seegangsdynamik die zeitliche Entwicklung der Eulerschen Strömung als Summe aus Euler- und Stokesdrift. Es existiert aber noch ein weiterer Wechselwirkungsmechanismus, der

¹Der Übergang Wasser-Luft wird als Sprungschicht gewertet.

²Die mittlere Strömung $\langle \underline{v} \rangle$ setzt sich aus der Eulerschen Strömung \underline{v}_e und der Stokesdrift \underline{v}_{sd} zusammen.

unabhängig von dem Energieinput aus der Atmosphäre ist. Aufgrund der nicht-verschwindenden Divergenz des Radiationstress-Tensors $\underline{\underline{S}}$ führt ein inhomogenes Wellenfeld zu einer Beschleunigung der mittleren Strömung. Wenn sich die spektrale Energieverteilung $\mathcal{E}(\underline{k})$ aufgrund von Refraktion und Propagation der Wellen sowie atmosphärischem Input und Dissipation von Seegangsenergie ändert, werden Tensor-Komponenten $\underline{\underline{S}} \sim \mathcal{E}(\underline{k})$ generiert, die als Schub- oder Scherspannungen die mittlere Strömungsdynamik beeinflussen. Die drei Mechanismen, atmosphärischer Antrieb der Eulerschen Strömung, die Stokesdrift und die Divergenz des Radiationstress, bewirken eine Kopplung der mittleren Strömungsdynamik an die Seegangsverhältnisse. Da aber auch die Seegangsdynamik vom Strömungszustand abhängt bilden die beiden verschiedenskalierten Prozesse ein interaktiv gekoppeltes System.

In dieser Arbeit ist der Einfluss von Wellen auf die Dynamik des Meeres theoretisch auf der Basis nicht-kanonischer Hamiltonscher Theorie untersucht worden. Die Energie-Casimir Methode der nichtlinearen Stabilitätstheorie wurde auf die hamiltonsche Struktur der störungsentwickelten hydrodynamischen Gleichungen angewendet, um Bilanzgleichungen für Seegang und Strömung herzuleiten. Das Ergebnis ist ein System linearisierter Gleichungen, deren Struktur vom ursprünglichen hamiltonschen System entscheidend abhängt. Sie beschreiben die zeitliche Entwicklung des Wellenfeldes und lassen sich zu einer adiabatischen Erhaltungsgleichung für die Größe Wellenwirkung umformulieren. Gleichzeitig folgt aus der systematischen Entwicklung der nicht-kanonischen Gleichungen bis zur zweiten Ordnung des Störungsparameters³ ε ein Satz hydrodynamischer Gleichungen für das seegangsbeeinflusste System. Die Wirkung der Wellen auf die Dynamik der mittleren Strömung wird als zusätzliche Schub- oder Scherspannung berücksichtigt. In den Gebieten, wo sich die Wellen brechen oder anderweitig Seegangsenergie dem Spektrum entzogen wird, führt der Welleneinfluss zu einem erhöhtem Wasserstand (wave setup) und einer zusätzlichen Strömungskomponente (Brandungsstrom).

Obwohl der theoretische Teil dieser Arbeit sich vornehmlich mit grundsätzlichen Problemen der Hydrodynamik beschäftigt, besitzt gerade dieser Abschnitt großes Potential für die Anwendung im Modellbetrieb. Aufgrund der geforderten nichtlinearen Stabilität des Gleichgewichtszustandes u_e sind die charakteristischen Größen der störungsentwickelten Gleichungen, Wellenwirkung I_k und Radiationstress $\underline{\underline{S}}$, nicht mehr nur reine Funktionen der Seegangsvariablen, sondern ebenfalls von dem ungestörten Zustand u_e der Eulerschen Strömung abhängig. Bisher war unklar, wie die Struktur des eulerschen Strömungsfeldes Propagation und Refraktion des Seegangs beeinflusst und sich letztendlich auf die Dynamik der seegangsinduzierten Strömung auswirkt. Unter der Voraussetzung eines homogenen Strömungsfeldes ist die Refraktion der Wellen als Dopplerverschiebung der intrinsischen Frequenz in der Dispersionsrelation des Seegangs berücksichtigt worden. Der vom eulerschen Strömungsfeld abhängige Beitrag zu den Tensor-Komponenten des Radiationstress wurde bisher ignoriert. In dieser Arbeit ist erstmals der Zusammenhang zwischen räumlich variablen Strömungsfeldern u_e und den Seegangsgrößen $I_k, \underline{\underline{S}}$ in den Bilanzgleichungen der mittleren Strömung und des Seegangs dargestellt worden. Dabei wurde die stabile und auf den zeitlichen Skalen des Seegangs stationäre Eulersche Strömung durch Casimirfunktionen spezifiziert. Eine einfache, eulersche Scherströmung mit einem Geschwindigkeitsvektor in $\underline{\tilde{x}}$ -Richtung⁴, dessen Profil ausschließlich von der Koordinate in $\underline{\tilde{y}}$ -Richtung abhängt $\underline{v}_e = v_e(\underline{\tilde{y}})\underline{\tilde{x}}$, diente als Anwendungsbeispiel. Wenn die Krümmung $\partial_{\underline{\tilde{y}}}^2 v_e$ des Geschwindigkeitsprofils ein positives Vorzeichen besitzt, dann erhöht sich der Wert der Wirkungsvariablen und der Betrag des Radiationstress-Tensors am Orte $(\underline{\tilde{x}}, \underline{\tilde{y}})$. Dahingegen führt eine negative Krümmung $\partial_{\underline{\tilde{y}}}^2 v_e < 0$ zu einer Verringerung der Werte. Ein nahezu homogenes Strömungsfeld $\partial_{\underline{\tilde{y}}}^2 v_e \approx 0$ besitzt einen maximalen Beitrag des Casimirfunktionals zu I_k und $\underline{\underline{S}}$. Solche Konfiguratio-

³Die Ausgangsgleichungen werden nach dem Skalar $\varepsilon \in \mathbb{R}$ entwickelt, indem der Störungsansatz $u = u_e + \varepsilon \delta u$ (mit $\delta u = \sum_n \varepsilon^{n-1} \delta^{(n)} u$) in die Gleichungen einführt wird und die entstehenden Terme nach den Potenzen von ε geordnet werden. Die reelle Zahl $\varepsilon \ll 1$ begrenzt den Einfluss der Störung auf die Dynamik der mittleren Strömung.

⁴Das Orthonormalensystem des Seegangs entspricht $\sum_2 = \{\underline{\tilde{x}}, \underline{\tilde{y}}, \underline{\tilde{z}}\}$ und der Ortsvektor $\underline{\tilde{x}} = (\underline{\tilde{x}}, \underline{\tilde{y}}, \underline{\tilde{z}})$ (Kapitel 2.1).

nen sind instabil und führen ohne Berücksichtigung von Dissipationsprozessen zu einem unbegrenzten Anwachsen der Seegangsenergie. Auf der anderen Seite verleihen Strömungsprofile ($v_e(\tilde{y}) \neq \text{konst.}$) dem Wasser eine gewisse „Steifigkeit“, die das Gesamtsystem Seegang & Strömung stabilisiert. Die hier vorgestellte Methode kann auf einige dreidimensionale Systeme⁵ erweitert werden. Dadurch wird es nun möglich, vertikale Strömungsprofile $\underline{v}_e(z)$ bei der Modellierung von Seegang und Strömung zu berücksichtigen. In der Regel beschränkt man sich darauf, die Wellenausbreitung in einer horizontalen Ebene zu betrachten, die einen gleichbleibenden Abstand zur Wasseroberfläche hin aufweist. Auf solche Systeme ist die Methode direkt übertragbar. Eine dreidimensionale Beschreibung, ohne Beschränkung der Bewegungsmöglichkeiten, verfügt im Allgemeinen nicht über genügend Casimirfunktionen, um den eulerschen Strömungszustand eindeutig festzulegen. In diesen Fällen kann die Methode nicht angewendet werden.

In Kapitel 3.2 wurde eine Wirkungsbilanzgleichung hergeleitet, die den Einfluss variabler Strömungsfelder auf die Seegangsgrößen berücksichtigt. Mir ist nicht bekannt, dass dieser Beitrag zu I_k jemals in den bestehenden Wellenmodellen betrachtet worden ist. Das scheint auch nicht unbedingt notwendig zu sein, da ein realistischer I_k -Anteil nur für sehr langwelligen Seegang gegeben ist. Für den Wellenzahlbereich des k -Modells und realistischen Strömungsprofilen ist der \underline{v}_e -abhängige Beitrag zur Wellenwirkung sehr groß. Daher muss festgestellt werden, dass die Eulersche Strömung unter den gegebenen Bedingungen durch das Ausbilden eines realistischen Profils nicht stabilisiert werden kann. Nur durch Dissipation von Seegangsenergie kann ein unbegrenztes Anwachsen der Wellenhöhe verhindert werden. Das ist eine der wesentlichen Aussagen der Störungsrechnung. Aufgrund dieser Tatsache kann der strömungsabhängige Beitrag zu I_k in den Modellanwendungen vernachlässigt werden. Die Strömungsrefraktion des Seegangs wird ausschließlich in der Dispersionsrelation der Wellen behandelt. Eine entsprechende Gleichung für den nicht-kanonischen Fall, die aus dem Imaginärteil von Gleichung (3.36) folgt [VS98], ist in dieser Arbeit nicht hergeleitet worden. Stattdessen wurde der übliche Ansatz verwendet, wonach die Propagationsgeschwindigkeit der Wellen gleich der Summe aus Gruppengeschwindigkeit \underline{c}_g und Strömungsgeschwindigkeit⁶ $\langle \underline{v} \rangle$ ist.

Neben der Analyse von Wechselwirkungsprozessen zwischen den Meereswellen und der Strömung lag der zweite Schwerpunkt meiner Arbeit in der Anwendung des gekoppelten numerischen Modells für Seegang und Strömung auf ausgesuchte Sturmflut-Szenarien. Es wurden zwei sehr schwere Sturmfluten behandelt, deren Wetterlagen unter der Bezeichnung „Hamburg-Orkan“ (16./17. Februar 1962) und „Anatol“ (03./04. Dezember 1999) bekannt geworden sind. Der Einfluss des Seegangs auf die Dynamik der mittleren Strömung ist vor allem in unmittelbarer Nähe der Küste deutlich. Dies gilt in besonderem Maße für schwere Sturmfluten mit langanhaltend starkem Wind und hohen Wasserständen. In den flachen Küstengebieten treten wellenbedingt erhöhte Wasserstände von 10–60 cm und seegangsinduzierte Strömungen von bis zu 0.8 m/s auf. Im Vergleich mit einem Wellenmodell, das mit konstanten Tiefen rechnet, wird eine wasserstandsbedingte Zunahme der Wellenhöhe von bis zu 3 m in den flachen Seegebieten verzeichnet.

Die Simulation der Sturmflut von 1962 liefert Ergebnisse, die mit den Beobachtungen der Feuerschiffsbesatzungen und den gemessenen Pegelkurven verglichen werden können. Da zu diesem Zeitpunkt auf den Schiffen noch keine Messverfahren für die Wellenhöhe zur Verfügung standen, wurden die Vergleichswerte abgeschätzt. Eine Gegenüberstellung der Simulationsergebnisse mit den Beobachtungswerten zeigt, dass die modellierten Wellenhöhen generell höher als die Schätzwerte sind, die Seegangsrichtung aber mit guter Genauigkeit bestimmt werden konnte. Für einen Vergleich des gekoppelten Modells mit objektiveren Messverfahren wurde die Sturmflut von 1999 ausgewählt. Darüber hinaus ist ein Sturmereignis des Jahres 2003 für einen längerfristigen Vergleich der gemessenen und modellierten Werte nachgerechnet worden. Für beide Zeiträume stehen gemessene Zeitreihen

⁵In dieser Arbeit haben wir uns auf zweidimensionale Systeme beschränkt, in denen immer genügend Casimirfunktionen vorhanden sind, um die koadjungierten Orbits eindeutig festzulegen. Im allgemeineren Fall dreidimensionaler Systeme muss dies nicht gegeben sein [Arn65b], [Dik65b].

⁶Anstelle der Eulerschen Strömung wird die berechnete, mittlere Strömung in die Dispersionsrelation eingesetzt.

der Wellenhöhe, Wind- bzw. Seegangsrichtung und der mittleren Periode T_{m1} zur Verfügung. Die Hindcast-Rechnungen zeigen, dass die Wechselwirkung von Seegang und großräumiger Zirkulation qualitativ richtig wiedergegeben wird. Für eine leichte Sturmflut (2003, Kap. 7.3.2) stimmen die modellierten Größen mit den gemessenen Werten an der Station *NSB-2* in der Nordsee überein. Dahingegen werden im Falle der schweren Sturmflut von 1999 (Kap. 7.3.1) zu große Wellenhöhen und zu niedrige mittlere Perioden⁷ T_{m1} vorhergesagt. Die Auswertung der Modellergebnisse hat gezeigt, dass die Abweichungen der simulierten Wellenhöhe und Periode T_{m1} von den Messwerten mit der Windgeschwindigkeit zunimmt und zum Höhepunkt des Sturms ihr Maximum erreicht. Dies legt den Schluss nahe, dass Sturmereignisse mit vergleichsweise geringen Windstärken (2003) durch das gekoppelte Modell besser reproduziert werden können als schwere Stürme (1999) mit großen Windstärken. Für die Abweichung der Simulationsergebnisse von den Messwerten können die Eigenschaften des Seegangsmodells verantwortlich sein.

Bei dem verwendeten Wellenmodell handelt es sich um das k -Modell der *GKSS*. Dieses speziell für die Vorhersage der Seegangsverhältnisse in Küstennähe optimierte Modell wurde ebenfalls für die Prognose in tieferen Seegebieten verwendet. Wie in [Sch98] gezeigt worden ist kann das k -Modell durch Eichung der Source-Funktionen in der gesamte Nordsee eingesetzt werden. Der verwendete Parametersatz für die offene See ist in Tabelle (Tab. 6.2) dargestellt. Die Source-Funktionen sind dann allerdings nicht mehr optimal für die Modellierung des Seegangs in den Küstengebieten eingestellt. Ein Ausweg wäre die Unterteilung des gesamten Modellgebietes in einen Nordsee- und einen Küstenteil wie im Zirkulationsmodell. Dessen Küstengebiet reicht jedoch zu weit in die Nordsee hinein, um nur von einem einzigen Parametersatz abgedeckt zu werden. Eine parameterabhängige Untergliederung des Küstengebietes ist nicht geschehen. Es gelten aber noch andere Einschränkungen für die Seegangsdynamik im Küstengebiet, die für die tieferen Regionen der Nordsee nicht gegeben sind. Unter den dortigen Bedingungen, ausreichende Wassertiefen und großem Fetch, entwickelt sich der Seegang auf längeren Zeitskalen und ungestört von ständig variierenden Umgebungsvariablen (z.B. Strömung, Tiefe), wie sie für eine Küstenregion typisch sind. Daher kann das k -Modell in der Nordsee nur eingeschränkt verwendet werden. In den küstenfernen Regionen wird der Beitrag nichtlinearer Wechselwirkung von Seegangsmoden zur zeitlichen Entwicklung des Spektrums wichtig. Dort sollte das k -Modell durch ein Wellenmodell, das nichtlineare Wechselwirkung berücksichtigt, zum Beispiel *WAM* [Kom94], ersetzt werden. Durch die Randsteuerung mit dem *WAM* wäre die korrekte spektrale Energieverteilung für das k -Modell im Küstengebiet vorgegeben.

Die Implementierung zweier Seegangsmodelle oder die Verwendung unterschiedlicher Source-Funktionen für die Teilgebiete ist in dieser Arbeit nicht versucht worden. Der Aufwand wäre zu groß, zumal die Teilgebiete nicht mit den Modellgittern des Zirkulationsmodells übereinstimmen. Eine optimale Anpassung der Modelle und eine geeignete Untergliederung des Simulationsgebietes in Teilraaster steht noch aus.

In der vorliegenden Arbeit ist der Wind-Antrieb des gekoppelten Modell genauer untersucht worden. Die beiden separaten Modell-Komponenten besitzen eine unterschiedliche Parametrisierung der Energie- bzw. Impulszufuhr aufgrund von Wind. Das Zirkulationsmodell rechnet mit einem meteorologischen Antrieb, dessen physikalische Parameter empirisch bestimmt worden sind. Damit ist der Einfluss von Oberflächenwellen auf die mittlere Strömung bereits partiell in der Beschreibung des Wind-Antriebs enthalten. Die zusätzliche Implementierung eines Seegangsmodells sorgt für eine Überbewertung des mittleren Effektes der Meereswellen auf die mittlere Strömung. Da eine Feinjustierung des gekoppelten Modells nicht Thema dieser Arbeit sein kann, wurde in den Modell-Rechnungen der ursprüngliche Windantrieb verwendet. Die Parametrisierung der Schubspannung erfolgt im *BShcmod* nach Smith & Banke [SB75] und im k -Modell nach Wu [Wu82].

In Kapitel 8 wurde der Versuch unternommen, einen einheitlichen, für beide Modell-Komponenten

⁷Die mittlere Periode T_{m1} eines Spektrums ist durch den Quotienten $T_{m1} = m_0/m_1$ gegeben. Das n -te Moment eines kontinuierlichen Energiespektrums $E(f)$ (Frequenz $f = \sigma/2\pi$) entspricht $m_n = \int f^n E(f) df$.

gültigen Inputmechanismus zu formulieren. Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Beschaffenheit des Wellenfeldes dazu geeignet ist, den atmosphärischen Input von Energie und Impuls in das Strömungsmodell zu beschreiben. Die Auswertung der Modellergebnisse (Kap. 7.2 und 7.3) hat gezeigt, dass die Verwendung empirischer Ansätze $\tau^{S\&B}$ in einem gekoppelten Modell zu unverhältnismäßig hohen Wasserständen führen kann. Der neue, in Kapitel 8 vorgestellte Ansatz τ^w scheint diesen Fehler zu verringern. Bis jetzt sind aber noch nicht genügend Modellstudien durchgeführt worden, um diesbezüglich wirklich zu klaren Aussagen zu kommen. Darüber hinaus besteht Klärungsbedarf in der Frage, ob die C_D -Parametrisierung des k -Modells an die Gegebenheiten in einem gekoppelten Modell für Seegang und Strömung angepasst werden muss. Bis jetzt wurde nur eine Ad hoc-Justierung der seegangsabhängigen Windschubspannung im Strömungsmodell durchgeführt (Fußnote 7, Kapitel 8). Eine Reskalierung der Input-Sourcefunktion würde eine Neubalancierung der Source-Funktionen des k -Modells zur Folge haben.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass mit dem gekoppelten Modell für Seegang und Strömung nun ein Werkzeug verfügbar ist, das gleichermaßen für die Vorhersage der mittleren (Zirkulations-) Größen (Wasserstand, Strömung, Temperatur, Salzgehalt, etc.) als auch für die Prognose der Seegangsgößen geeignet ist. Das neue Modell beinhaltet die wesentlichen physikalischen Prozesse im Ozean. Wie die numerischen Ergebnisse zeigen, wird die Dynamik des Meeres durch das gekoppelte Modell qualitativ richtig wiedergegeben. Für eine quantitative Übereinstimmung der Simulationsergebnisse mit den Messdaten müssen noch notwendige Modellanpassungen vorgenommen werden.

Danksagung

Die Untersuchungen für die vorliegende Arbeit wurden am Bundesamt für Seeschifffahrt und Hydrographie (*BSH*) durchgeführt. Mein besonderer Dank gilt Dr. Sylvin H. Müller-Navara und Stephan Dick, die viel zu der vorliegenden Arbeit beigetragen haben. Aufgrund ihrer Bemühungen wurde meine Promotion erst möglich. Meinen Kollegen Dr. Eckhard Kleine und Dieter Schrader möchte ich für die vielen, hilfreichen Diskussionen, Bemerkungen und Ratschläge danken. Sie waren unermüdlich darin, frühere Versionen meiner Arbeit ihrem kritischen Urteil zu unterziehen. Ohne ihre Hilfe wäre es mir wesentlich schwerer gefallen meine Doktorarbeit zu vollenden.

Mein uneingeschränkter Dank gilt Prof. Dr. Jürgen Sündermann vom Institut für Meereskunde der Universität Hamburg und Dr. Wolfgang Rosenthal vom *GKSS*-Forschungszentrum für die Betreuung der Arbeit. Ich danke ihnen für die Ausdauer und Geduld, die sie für mich aufgebracht haben und auch dafür, dass sie sich auf ein solches Thema überhaupt eingelassen haben.

Mein besonderer Dank gilt meinen Eltern Helge und Jürgen Murawski, ohne deren beständigen Beistand ich nie so weit gekommen wäre. Hätten sie mir nicht durch ihre Zuversicht den Rücken gestärkt, wäre mein Lebensweg sicherlich anders verlaufen. Ich danke auch meiner Tante Monika Murawski, die den Kampf gegen meine fehlerhaften Interpretationen der deutschen Sprache nie aufgegeben hat. Ohne ihre redaktionellen Großtaten würde die vorliegende Arbeit sicherlich um einiges unleserlicher sein.

Kapitel 10

Anhänge

10.1 Anhang A0: Die Positionsdaten der Messstationen

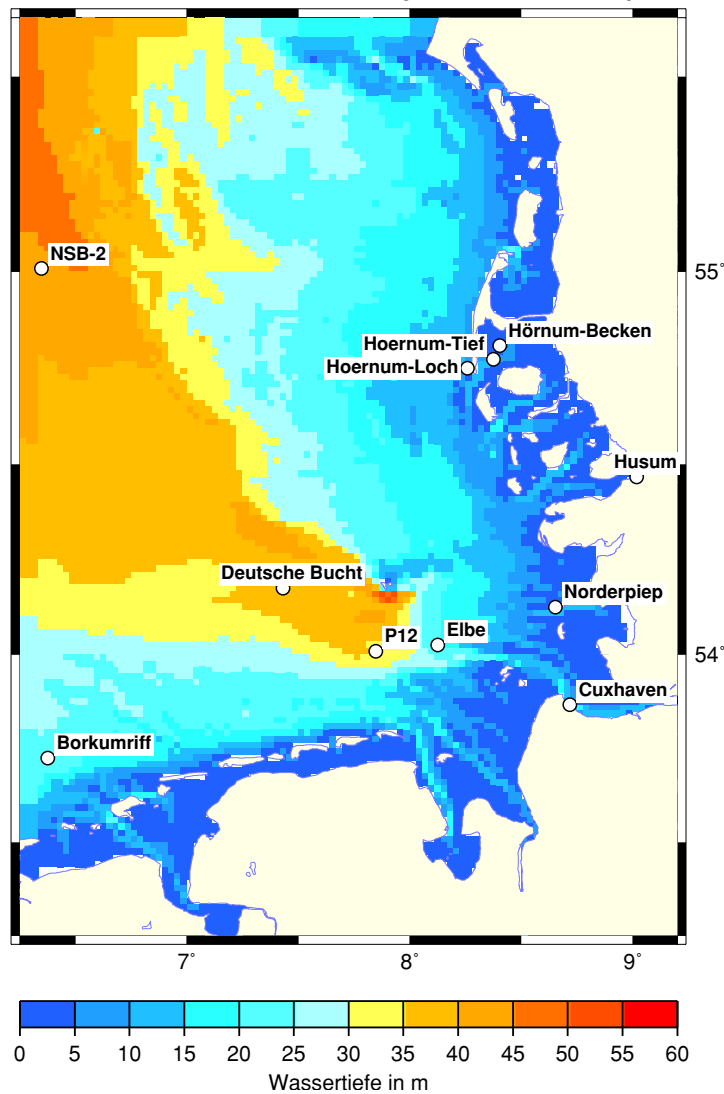


Abbildung 10.1: Position der Messstationen in der Deutschen Bucht. Die Positionsdaten und Wassertiefen sind in Tabelle 10.1 aufgelistet. Dargestellt ist die Modell-Topographie der Deutschen Bucht.

Station	Position	Tiefe an der Messstation	Modelltiefe (mittlere Wassertiefe)
NSB-2	55.000° N, 6.333° E	etwa 42 m NN	43.9 m
Borkumriff	53.733° N, 6.392° E	etwa 23 m NN	22.7 m
Deutsche Bucht	54.167° N, 7.450° E	etwa 33 m NN	37.3 m
P12	54.000° N, 7.858° E	etwa 35 m NN	34.9 m
Süderhever	54.296° N, 8.389° E	etwa 11.5 m NN	11.6 m
Hoernum-Becken	54.808° N, 8.431° E	–	0.8 m
Norderpiep	54.125° N, 8.653° E	–	4.4 m
Cuxhaven	53.868° N, 8.720° E	–	–
Husum	54.473° N, 9.027° E	–	–

Tabelle 10.1: Positionsdaten (2. Spalte) der dargestellten Messstationen aus Abbildung [10.1], gemessene mittlere Wassertiefe an der Messposition (3. Spalte) und verwendete Modelltiefe des 1×1 nm-Rasters (4. Spalte).

10.2 Anhang A1: Orbits auf einem 1-Tori: Casimirfunktionen

In diesem Kapitel betrachten wir die von der Lie-Gruppe \mathcal{G} generierten, coadjungierten Orbits \mathcal{O} auf einem 1-torus und wollen alle Casimirfunktionen der Lie Algebra \mathfrak{g} (10.2) ausgehend von ihren Eigenschaften bestimmen. Die coadjungierten Orbits einer Lie-Gruppe \mathcal{G} sind symplektische Mannigfaltigkeiten. Eigentlich sind sie sogar die symplektischen Blätter (leaves) der Lie-Poisson Klammer, woraus folgt, dass für die Funktionale $C, H : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathbb{R}$ eine Poisson Klammer auf den coadjungierten Orbits definiert werden kann $\{C, H\}_{\mathcal{O}}^{\pm} = \{C_{\mathcal{O}}, H_{\mathcal{O}}\}^{\pm}$. Die Trajektorien des Hamiltonischen Vektorfeldes $X_H(\nu) = ad_{\delta H/\delta \mu}^*(\nu)$ ($\nu \in \mathcal{O}, H \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}^*)$), welche in $\mu \in \mathcal{O}$ starten, verbleiben dann für alle Zeiten auf \mathcal{O} , da X_H stets tangent zu \mathcal{O} ist. Gleiches gilt für die Trajektorien des Vektorfeldes $X_C(\nu) = ad_{\pi}^*(\nu)$ mit $\pi = \delta C/\delta \mu \in \mathfrak{g}_{\mu}$, wenn $\{C, H\}_{\mathcal{O}}^{\pm} = 0$. Funktionale $C \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}^*)$ für die zu jeder Zeit und für alle $\mu \in \mathfrak{g}^*$ gegeben ist, dass $\delta C/\delta \mu \in \mathfrak{g}_{\mu}$, sind daher Casimirfunktionen. Es ist möglich, alle Funktionen C dadurch zu ermitteln, dass die zu einem Orbit \mathcal{O} und Startpunkt μ gehörende Lie-Algebra \mathfrak{g}_{μ} bestimmt wird. Eine Lie-Algebra wird oft auch als Raum der infinitesimalen Gruppenelemente bezeichnet. Deshalb definieren wir im ersten Schritt die Lie-Gruppe G als semidirektes Produkt der Lie-Gruppe V_{σ} mit der komplexen Ebene \mathbb{C}^2 ($V_{\sigma} \rtimes \mathbb{C}^2$) und berechnen die coadjungierte Wirkung $Ad_{g^{-1}}^*(\xi)$ eines Gruppenelements g auf $\xi \in \mathfrak{g}^*$. Die coadjungierte Wirkung $Ad_{g^{-1}}^*(\xi)$ ist die zum Gruppenhomomorphismus $Ad_{g^{-1}}(\mu)$ ($\mu \in \mathfrak{g}$) der Matrix Lie-Gruppe G gehörende duale Wirkung. Dann ist $ad_{\mu}^*(\xi) = \frac{d}{dt}|_{t=0} Ad_{exp(\mu t)}^*(\xi)$ die dazu gehörende Lie-Algebra Abbildung, wobei $exp(\mu t) \in G$ ist. Aufgrund des Zusammenhanges zwischen der Kommutator-Klammer und der Lie-Algebra Wirkung und der Tatsache, dass Casimirfunktionen C mit jeder anderen auf \mathcal{O} definierten Funktion kommutieren ($\{C, H\}_{\mathcal{O}}^{\pm} = 0$), ist gegeben, dass $ad_{\xi}^* \mu = [\mu, \xi] = 0$. Dadurch ist \mathfrak{g}_{μ} und damit auch die Funktionen C ausgehend von der Definition der Lie-Gruppe G bestimmt.

$$V_{\sigma} = \begin{pmatrix} e^{i\sigma t} & 0 \\ 0 & e^{i\sigma t} \end{pmatrix}, \quad \underline{r} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}, \quad G = \left[\begin{pmatrix} V_{\sigma}(t) & \underline{r} \\ \underline{0} & 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}, r, s \in \mathbb{C}^2 \right] \quad (10.1)$$

Hier ist die Frequenz σ eine reelle Funktion, deren Abhängigkeit von der Wellenzahl \underline{k} vom Ort \underline{x} vorerst nicht berücksichtigt wird. Die periodische Bewegung im Phasenraum wird durch die Wirkung der Lie-Gruppe V_{σ} in G beschrieben.

Die Lie-Algebra \mathfrak{g} von G ist gleich dem Satz von Matrizen μ , für die gilt, dass $e^{\mu t}$ ein Element von G ist, für alle reellen Zahlen t . Die Lie Klammer ist dann die übliche Kommutator Klammer. Mit $a, b, x, y \in \mathbb{C}$ und $\sigma, u \in \mathbb{R}$ ergeben sich für die Elemente der Lie-Algebra \mathfrak{g} und der dazu dualen Algebra \mathfrak{g}^*

$$\mu = \begin{pmatrix} i\sigma & 0 & x \\ 0 & i\sigma & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}, \quad \xi = \begin{pmatrix} iu & 0 & 0 \\ 0 & iu & 0 \\ a & b & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}^*. \quad (10.2)$$

Zwischen $\mu \in \mathfrak{g}$ und dem Element ξ der dazu dualen Lie-Algebra \mathfrak{g}^* existiert die folgende nicht degenerierte, bilineare Abbildung

$$\langle \mu, \xi \rangle = Re(\text{trace}(\mu, \xi)). \quad (10.3)$$

Wir beschränken uns dabei auf Matrix Lie-Gruppen und führen die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein, welche für die zur speziellen linearen Gruppe gehörende Lie-Algebra $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{C})$ durch (10.3) gegeben ist.

Der Radialvektor des Torus $\underline{a} = (a, b)$ besitzt die komplexen Komponenten $a = p + iq$ und $b = w + iv$. Dabei wird der Torus vereinfacht als Oberfläche eines Zylinders angesehen, dessen Basis durch die komplexe Ebene gebildet wird. Wir betrachten verschiedene Schnittebenen parallel zur eingeführten Basisfläche und führen einen Vektor \tilde{u} ein, der entlang des Torus weist. Es ist daher gegeben, dass

dieser auf allen Flächen senkrecht steht. Der Radialvektor rotiert in der jeweiligen Schnittebene generiert durch die Bewegung entlang der \tilde{u} -Achse.

Nun wird die adjungierte Wirkung des Gruppenelements g^{-1} auf das Lie-Algebra Element μ betrachtet und die abkürzende Schreibweise $g^{-1} = (V_\sigma, \underline{r})^{-1} = (V_\sigma^{-1}, -\phi(V_\sigma^{-1})\underline{r})$ eingeführt. Dabei kennzeichnet ϕ eine Darstellung von G auf dem Vektorraum \mathcal{V} ($\underline{r} \in \mathcal{V}$) und ist damit ein glatter Gruppenhomomorphismus. Die adjungierte Wirkung von g^{-1} auf $\mu = (e + i\sigma, \underline{x}) \in \mathfrak{g}$ ist durch das semidirekte Produkt $((a, b) \cdot (\alpha, \beta) = (a\alpha, \phi(\alpha)\beta + b))$

$$Ad_{g^{-1}}\mu = (V_\sigma^{-1}, -\phi(V_\sigma^{-1})\underline{r}) \cdot (e + i\sigma, \underline{x}) \cdot (V_\sigma, \underline{r}) \quad (10.4)$$

$$= (V_\sigma^{-1} + V_\sigma^{-1}i\sigma, \phi(V_\sigma^{-1})\underline{x} - V_\sigma^{-1}\underline{r}) \cdot (V_\sigma, \underline{r}) \quad (10.5)$$

$$= (e + Ad_{V_\sigma^{-1}}(i\sigma), \phi(V_\sigma^{-1} + V_\sigma^{-1}i\sigma)\underline{x} + \phi(V_\sigma^{-1})\underline{x} - \phi(V_\sigma^{-1})\underline{r}) \quad (10.6)$$

gegeben, wobei noch zu beachten ist, dass der erste und der letzte Term auf der rechten Seite des Kommas gegeneinander gekürzt werden können. Damit ist die koadjungierte Wirkung des Gruppenelementes g^{-1} ($g = e^{\mu t}$) durch die bilineare Abbildung (10.3) gegeben $\langle Ad_{g^{-1}}^*\xi, \mu \rangle = \langle \xi, Ad_{g^{-1}}\mu \rangle$. Die Lie-Algebra-Wirkung $ad_\xi^*(\mu)$ kann dann wie folgt berechnet werden;

$$ad_\xi^*(\mu) = \frac{d}{dt} \left(Ad_{g^{-1}}^*(\xi) \right)_{t=0} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i\tilde{u} & 0 & 0 \\ 0 & i\tilde{u} & 0 \\ a e^{-i\sigma t} & b e^{-i\sigma t} & 0 \end{pmatrix}_{t=0} \quad (10.7)$$

Dabei ist $\tilde{u} = u + \frac{1}{2}Im(ae^{-i\sigma t} + be^{-i\sigma t})$ und deshalb $\partial_t \tilde{u}|_{t=0} = -\frac{1}{2}Im(ax + by)$. Die Bedingung, dass $ad_\xi^*(\mu) = 0$ ist ($\mu \in \mathfrak{g}_\mu, \xi \in \mathfrak{g}_\mu^*$), bedeutet folgendes: Es existiert zumindest ein Paar $a, b \neq 0$ mit $\sigma = 0$ und $\partial_t \tilde{u}|_{t=0} = 0$. Nach Einsetzen in die Ausgangsgleichung $\delta C / \delta \mu \in \mathfrak{g}_\mu$ folgt daraus, dass

$$\frac{\delta C}{\delta \mu} = \begin{pmatrix} i\partial_u C & 0 & \partial_a C \\ 0 & i\partial_u C & \partial_b C \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| Im(ax + by) = 0 \right] = \mathfrak{g}_\mu. \quad (10.8)$$

Dabei wurden die partiellen Ableitungen $\partial_u C \in \mathbb{R}$ und $\partial_a C, \partial_b C \in \mathbb{C}$ der Casimirfunktionen C nach den Variablen a, b und u eingeführt. Ein Vergleich (10.8 links, rechts) zeigt, dass $\partial_u C = 0$ und $Im(a\partial_a C + b\partial_b C) = 0$ ist. Um daraus nun reelle Gleichungen für die Funktionen C zu bilden, wird die Zerlegung $C = P + iQ$ mit $P, Q \in \mathbb{R}$ eingeführt. Wir suchen nach holomorphen Casimirfunktionen, für die gegeben ist, dass $\partial_a C = \partial_p P + i\partial_q Q$, wobei $a = p + iq$. Mit Hilfe der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen $\partial_p P = \partial_q Q$ und $\partial_q P = -\partial_p Q$ lässt sich dies zu einer Gleichung umformen, die nur noch vom Realteil von C abhängt ($\partial_a C = \partial_p P - i\partial_q P$). Gleiches gilt für $\partial_b C = \partial_w P + i\partial_v Q = \partial_w P - i\partial_v P$ mit $p = w + iv$ und $\partial_w P = \partial_v Q$ sowie $\partial_v P = -\partial_w Q$. Nach Einsetzen dieser Ergebnisse in (10.8) erhält man folgende partielle Differentialgleichung für $P = Re(C)$:

$$0 = Im[a \partial_a C + b \partial_b C] \quad (10.9)$$

$$= Im[(p + iq)(\partial_p P - i\partial_q P) + (w + iv)(\partial_w P - i\partial_v P)] \quad (10.10)$$

$$= q\partial_p P - p\partial_q P + v\partial_w P - w\partial_v P. \quad (10.11)$$

Gleichung (10.11) kann für die beiden Radialanteile, abhängig von $|a|$ und $|b|$, separat gelöst werden. Dann lauten die Gleichungen für die beiden Charakteristiken $\vartheta_a(p, q) = 0$, beziehungsweise $\vartheta_b(w, v) = 0$, wobei die Funktionen ϑ_a und ϑ_b Lösungen der partiellen Differentialgleichungen (10.12a,b) sind.

$$q \frac{\partial \vartheta_a}{\partial p} - p \frac{\partial \vartheta_a}{\partial q} = 0 \quad \text{und} \quad w \frac{\partial \vartheta_b}{\partial v} - v \frac{\partial \vartheta_b}{\partial w} = 0 \quad (10.12)$$

Auf diese Weise erhält man als Lösungsschar $\vartheta_a = \frac{1}{2}(q^2 + p^2) + const.$ und $\vartheta_b = \frac{1}{2}(w^2 + v^2) + const.$. Aus der Bedingung $\vartheta_a = \vartheta_b = 0$ folgt nun, dass sowohl $h_a = \frac{1}{2}(q^2 + p^2)$ als auch $h_b = \frac{1}{2}(w^2 + v^2)$ konstant

sein müssen. Jedes Casimirfunktional hängt von h_a und von h_b ab, $C = f(h_a, h_b)$. Im speziellen Fall $f(h_a, h_b) = h_a$ ist der Realteil von C durch $P = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$ gegeben und die partiellen Ableitungen von C entsprechen $\partial_a C = \partial_p P - i\partial_q P = p - iq$ und $\partial_b C = 0$. Dann besitzt $(a\partial_a C + b\partial_b C)$ keine imaginären Anteile mehr und die negative Lie-Poisson Klammer $\{F, C\}_-$ verschwindet für beliebige, auf dem Orbit \mathcal{O} definierte, reellwertige Funktionen F . Mit $\xi \in \mathfrak{g}^*$ und $\partial_u C = 0$ ist

$$\begin{aligned} \{F, C\}_-(\xi) &= -\left\langle \xi, \left[\frac{\delta F}{\delta \xi}, \frac{\delta C}{\delta \xi} \right] \right\rangle \\ &= \operatorname{Im}[a(\partial_u F \partial_a C - \partial_u C \partial_a F) + b(\partial_u F \partial_b C - \partial_u C \partial_b F)] = 0. \end{aligned} \quad (10.13)$$

Aus Gleichung (10.13) lässt sich ablesen, dass $C_1 = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$ und $C_2 = \frac{1}{2}(w^2 + v^2)$ Casimirfunktionen sind. Wenn nun die üblichen Bezeichnungen eingeführt werden, indem p_k mit dem Wellenimpuls der k -ten Mode und q_k mit der lokalen Auslenkung der Meeresoberfläche identifiziert werden, dann erhält man, nach beachten der korrekten Dimension der Größen $q_k = \sigma_k q_k$ (Intrinsische Frequenz σ_k), das folgende Endergebnis: Das Hamiltonfunktional $H_0 = \frac{1}{2}(p_k^2 + \sigma^2 q_k^2)$ des ungestörten Seegangs ist ein Casimirfunktional, das auf dem Orbit \mathcal{O} definiert ist.

10.3 Anhang A2: Die Invarianz der Größe Wellenwirkung

Die in Gleichung (3.39) (Kapitel (3.2)) definierte Größe Wellenwirkung I ist nur im Falle des Verschwindens der zweiten Zeile von Gleichung (3.36) eine Erhaltungsgröße. Nach Einsetzen der Definition von $\operatorname{Im}^{(1)}$ und Ausnutzen der Eigenschaften von ad^* und h_C lassen sich die entsprechenden Terme wie folgt zusammenfassen (10.14):

$$\begin{aligned} &\left\langle \delta^{(1)} u, i \bar{\nabla} \left(i \sigma \nabla_k \tilde{h}_C \tilde{\nabla} \delta^{(1)} u \right) + \operatorname{Im}^{(1)} \delta^{(1)} u \right\rangle \\ &= \left\langle \delta^{(1)} u, i \bar{\nabla} \left[\nabla_k \tilde{h}_C \tilde{\operatorname{ad}} \left(\tilde{h}_C \delta^{(1)} u \right)^* u_e \right] + \operatorname{Im}^{(1)} \delta^{(1)} u \right\rangle \\ &= -\left\langle \delta^{(1)} u, \tilde{h}_C \left[i \tilde{\operatorname{ad}} \left(\bar{\nabla} \cdot \nabla_k \tilde{h}_C \delta^{(1)} u \right)^* u_e - \tilde{\operatorname{ad}} \left(\tilde{h}_C^{(1)} \delta^{(1)} u \right)^* u_e \right] \right\rangle + \\ &\quad + \left\langle \delta^{(1)} u, \tilde{h}_C \left[i \bar{\nabla} \cdot \nabla_k \tilde{\operatorname{ad}} \left(\tilde{h}_C \delta^{(1)} u \right)^* u_e + i \nabla_k \tilde{\operatorname{ad}} \left(\tilde{h}_C \delta^{(1)} u \right)^* \bar{\nabla} u_e \right] \right\rangle \\ &\quad + \left\langle \delta^{(1)} u, \tilde{h}_C \delta \tilde{\operatorname{ad}} \left(\tilde{h}_C \delta^{(1)} u \right)^* u_e \right\rangle \end{aligned} \quad (10.14)$$

Aufgrund der Schiefsymmetrie der Jacobi-Lie Klammer verschwindet der dritte Summand von $\operatorname{Im}^{(1)}$ nach partieller Integration¹.

Unter Verwendung der Beziehungen (3.7) und (3.8) lässt sich nachweisen, dass die einzelnen Summanden von Gleichung (10.14) gegeneinander gekürzt werden können. Aus der Reihenentwicklung von $\delta H_C / \delta u$

$$\frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\delta H_C}{\delta u} - \frac{\delta H_C}{\delta u_e} \right) = h_C \delta u + \varepsilon h_C^{(1)} \delta u = \frac{1}{\varepsilon} \tilde{h}_C \delta u + \left[\bar{h}_C \delta u + \tilde{h}_C^{(1)} \delta u \right] + \varepsilon \bar{h}_C^{(1)} \delta u \quad (10.15)$$

und $\operatorname{ad}(\boxplus)^* \delta u$ (LHS Gleichung (10.16): $\operatorname{ad}(\boxplus)^* \delta u = \operatorname{ad}(\boxplus)^* u - \operatorname{ad}(\boxplus)^* u_e$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{ad}(\boxplus)^* \delta u &= \frac{1}{\varepsilon} \left(\delta \tilde{\operatorname{ad}}(\boxplus)^* u + \tilde{\operatorname{ad}}(\boxplus)^* \delta u \right) + \left[\delta \bar{\operatorname{ad}}(\boxplus)^* u + \delta^2 \tilde{\operatorname{ad}}(\boxplus)^* u \right] \\ &\quad + \left[\bar{\operatorname{ad}}(\boxplus)^* \delta u + 2 \delta \tilde{\operatorname{ad}}(\boxplus)^* \delta u \right] + \varepsilon \left(\delta^2 \bar{\operatorname{ad}}(\boxplus)^* u + 2 \delta \bar{\operatorname{ad}}(\boxplus)^* \delta u \right) \end{aligned} \quad (10.16)$$

¹ $\operatorname{ad}_F \left(\tilde{h}_C \delta^{(1)} u \right)^* \delta^{(1)} u = \int \delta^{(1)} u \left[F, \tilde{h}_C \delta^{(1)} u \right] d^2 \underline{x} = - \int F \left[\delta^{(1)} u, \tilde{h}_C \delta^{(1)} u \right] d^2 \underline{x} = 0$

erhält man nach Anwenden der Differentiationsregeln (3.27)

$$\tilde{h}_e^{(1)} \delta u = -\bar{h}_c \delta u = -\bar{\nabla} \left[\hat{h}_C \delta u \right] - i \bar{\nabla} \cdot \nabla_k \tilde{h}_C \delta u \quad (10.17)$$

$$\delta \widetilde{\text{ad}}(\boxplus)^* u = -\overline{\text{ad}}(\boxplus)^* u \quad \text{und} \quad -\delta \widetilde{\text{ad}}(\boxplus)^* \varepsilon \delta u = \frac{1}{2} \overline{\text{ad}}(\boxplus)^* \varepsilon \delta u \quad (10.18)$$

und Aufsummieren der beiden Gleichungen (10.18)

$$\begin{aligned} \delta \widetilde{\text{ad}}(\boxplus)^* u_e &= -\frac{\varepsilon}{2} \overline{\text{ad}}(\boxplus)^* \delta u - \overline{\text{ad}}(\boxplus)^* u_e \\ &= -\frac{\varepsilon}{2} \overline{\text{ad}}(\boxplus)^* \delta u - \bar{\nabla} \left[\hat{\text{ad}}(\boxplus)^* u_e \right] \\ &\quad - i \bar{\nabla} \cdot \nabla_k \widetilde{\text{ad}}(\boxplus)^* u_e - i \nabla_k \widetilde{\text{ad}}(\boxplus)^* \bar{\nabla} u_e \end{aligned} \quad (10.19)$$

zwei Relationen (10.17), (10.19), die eingesetzt in die Ausgangsgleichung (10.14) bewirken, dass die in der zweiten Zeile von Gleichung (3.36) zusammengefassten Terme gleich Null gesetzt werden können. Dabei werden nur $O(\varepsilon)$ -Terme betrachtet (nach Multiplikation von (10.15) und (10.16) mit ε) und die nach dem Integralsatz von Gauß entstehenden Oberflächenintegrale vernachlässigt.

10.4 Anhang A3: Die Gleichung der Ordnung $O(\varepsilon^2)$

Die phasengemittelten Bilanzgleichungen des gestörten Systems enthalten einen residualen Anteil des Seegangs. In den $O(\varepsilon^2)$ -Gleichungen der Störungsentwicklung (10.26) besitzt dieser Beitrag die Bedeutung einer generalisierten Kraft². Sie treibt die mittlere Strömung $\langle u \rangle$ bestehend aus Euler-Strömung u_e und generalisierter Stokesdrift u_{sd} an. In den vertikal integrierten Gleichungen (10.21) ist diese Kraft zur negativen Divergenz des Radiationstress-Tensors S_{ij} äquivalent.

Die Gleichung (10.21) enthält alle reellwertigen Beiträge der Störungsentwicklung (10.26) zweiter Ordnung. Da der Operator h_c sich aus zweifachen Ableitungen der Wellenfunktion zusammensetzt, sind \tilde{h}_c , \bar{h}_c reellwertige Operatoren und alle $\widetilde{\text{ad}}(\boxplus)^*$ -Terme in (10.26) imaginär. Diese Terme werden in Gleichung (10.21) nicht berücksichtigt. Nach dem Zusammenfassen der $O(\varepsilon^0)$ -Bilanzgleichung für die Gleichgewichtslösung $\partial u_e / \partial T = -\overline{\text{ad}}(\delta H_C / \delta u_e)^* u_e$ und der $O(\varepsilon^2)$ -Störungsgleichung erhält man ein System von Differentialgleichungen für die Strömung $u = u_e + \delta^{(2)} u$. Da uns nur die mittleren Transportprozesse interessieren, müssen die horizontal, über das Gebiet $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^2$, und vertikal, über die Dicke der Schicht $s(\zeta_1) \leq z \leq s(\zeta_2)$, integrierten Gleichungen noch phasengemittelt werden. Die generalisierte Stokesdrift entspricht $u_{sd} = \langle \delta^{(2)} u \rangle$. Bei der Herleitung von Gleichung (10.20) sind die Störungsterme ungerader Ordnung in ε nicht berücksichtigt worden, da ungerade Potenzen der Winkelfunktionen $\sin(\vartheta)$ und $\cos(\vartheta)$ nach Integration von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = 2\pi$ verschwinden.

$$\frac{1}{V} \int_{\mathcal{D}} \int_{s(\zeta_1)}^{s(\zeta_2)} \frac{\partial(u_e + u_{sd})}{\partial T} dz d^{(2)} \underline{x} = -\frac{1}{V} \int_{\mathcal{D}} \int_{s(\zeta_1)}^{s(\zeta_2)} \overline{\text{ad}} \left(\frac{\delta H_C}{\delta u_e} \right)^* u_e dz d^{(2)} \underline{x} - \bar{\nabla}_{X_j} \hat{S}_{ij}(\underline{X}, T) \quad (10.20)$$

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{X_j} \hat{S}_{ij}(\underline{X}, T) &= \frac{1}{2\pi V} \int_0^{2\pi} \int_{\mathcal{D}} \int_{s(\zeta_1)}^{s(\zeta_2)} \left\{ \overline{\text{ad}} \left(\tilde{h}_C \delta^{(1)} u \right)^* \delta^{(1)} u + \overline{\text{ad}} \left(\tilde{h}_C \delta^{(2)} u \right)^* u_e + \right. \\ &\quad \left. + \overline{\text{ad}} \left(\tilde{h}_C^{(1)} \delta^{(1)} u \right)^* u_e + \delta \overline{\text{ad}} \left(\tilde{h}_C \delta^{(1)} u \right)^* u_e \right\} dz d^{(2)} \underline{x} d\vartheta \end{aligned} \quad (10.21)$$

²Der Terminus „Generalisiert“ bedeutet hier das in Bezug auf die Impulsbilanzgleichung der Divergenzterm des Radiationstress die Bedeutung einer Kraft hat.

Die Divergenz des Radiationstress-Tensors S_{ij} enthält alle Beiträge der rechten Seite von (10.21), die sich aus linearen Seegangsmode zusammensetzen und keine Anteile höherer Ordnung der Taylor-Entwicklung von $\text{ad}(\boxplus)^*$ und h_C besitzen. Daher entfällt die komplette zweite Zeile der Gleichung (10.21). Der erste Term von Gleichung (10.21) entspricht der Divergenz des Radiationstress-Tensors. Der zweiten Term $\overline{\text{ad}}(\tilde{h}_C \delta^{(2)} u)^* u_e$ kann mit dem ersten Term auf der rechten Seite von (10.20) und den beiden unberücksichtigten Termen $\overline{\text{ad}}(\delta H_C / \delta u_e)^* \delta^{(2)} u = 0$ ($\delta H_C / \delta u_e = 0$, nach Voraussetzung) und $\overline{\text{ad}}(\tilde{h}_C \delta^{(2)} u)^* \delta^{(2)} u$ ($O(\varepsilon^4)$ -Term) kombiniert werden (10.22). Das Ergebnis ist ein Satz von Bilanzgleichungen (10.20) für die mittlere Strömung $\langle u \rangle = u_e + u_{sd}$.

Die Hydrodynamik eines inkompressibles Fluids auf einer Äquipotentialfläche des Gravitationsfeldes wurde in Kapitel 4.1 behandelt. Der zweite Term auf der rechten Seite von (10.21) ist in diesem Fall gleich $\langle \overline{\text{ad}}(\tilde{h}_C \delta^{(2)} \underline{v})^* \underline{v}_e \rangle \equiv (\underline{v}_e \cdot \overline{\nabla}) \underline{v}_{sd}$ und

$$\begin{aligned} & \left\langle \overline{\text{ad}} \left(\frac{\delta H_C}{\delta \underline{v}_e} \right)^* \underline{v}_e + \overline{\text{ad}} \left(\tilde{h}_C \delta^{(2)} \underline{v} \right)^* \underline{v}_e + \overline{\text{ad}} \left(\frac{\delta H_C}{\delta \underline{v}_e} \right)^* \delta^{(2)} \underline{v} + \overline{\text{ad}} \left(\tilde{h}_C \delta^{(2)} \underline{v} \right)^* \delta^{(2)} \underline{v} \right\rangle \equiv \\ & \equiv (\underline{v}_e \cdot \overline{\nabla}) \underline{v}_e + (\underline{v}_e \cdot \overline{\nabla}) \underline{v}_{sd} + (\underline{v}_{sd} \cdot \overline{\nabla}) \underline{v}_e + (\underline{v}_{sd} \cdot \overline{\nabla}) \underline{v}_{sd} = [(\underline{v}_e + \underline{v}_{sd}) \cdot \overline{\nabla}] [\underline{v}_e + \underline{v}_{sd}] . \end{aligned} \quad (10.22)$$

Für das hier behandelte Beispiel (Kapitel 4.1) wird die zeitliche Entwicklung des mittleren Geschwindigkeitsfeldes $\underline{v}_e + \underline{v}_{sd}$ durch Gleichung (10.20) beschrieben. Ohne das Problem vorher konkretisieren zu müssen kann aus (10.20) eine Differentialgleichung (10.23) für die zeitliche Entwicklung des dynamischen Vektors $u = u_e + u_{sd}$ unter dem Einfluss von Seegang hergeleitet werden.

$$\frac{du_e}{dT} + \frac{du_{sd}}{dT} = \frac{1}{2\pi V} \int_0^{2\pi} \int_{\mathcal{D}} \int_{s(\zeta_1)}^{s(\zeta_2)} \overline{\text{ad}} \left(\tilde{h}_C \delta^{(1)} u \right)^* \delta^{(1)} u \, dz \, d^2 \underline{x} \, d\vartheta \quad (10.23)$$

In den Kapiteln (4.1) und (4.2) wird der Seegangsinduzierte Impuls für ein inkompressibles Medium und einem Fluid unter Flachwasser-Bedingungen berechnet. Im Rest dieses Abschnittes werden die nicht-kanonischen Bewegungsgleichungen zweiter Ordnung in ε näher untersucht.

Die im Kapitel (3.2.2) hergeleitete Wellenwirkungs-Bilanzgleichung resultiert aus einer Linearisierung der nichtkanonischen Hamiltonischen Gleichung. In der letztendlich gefundenen Beziehung balanciert die Rate, mit der sich die Wirkungsgröße I lokal ändert, den räumlichen und spektralen Fluss dieser Größe ($dI/dt = \partial I / \partial t + \overline{\nabla} \cdot I \underline{c}_g + \nabla_k \cdot I \underline{k} = 0$). Gleichung (3.39) kann daher für jede Mode separat gelöst werden. Um nun auch Energie- bzw. Wirkungstransport aufgrund nichtlinearer Wechselwirkung von Seegangsmode zuzulassen, müssen die Ausgangsgleichungen (3.3) noch mindestens bis zur nächst höheren (der zweiten) Ordnung entwickelt werden. Nach Definition der Operatoren L und Q (es gilt die Beziehung $Q\delta^{(1)} u = -L\delta^{(2)} u$)

$$\begin{aligned} Q\delta^{(2)} u &= \frac{\partial u^{(2)}}{\partial T} \frac{\tilde{\nabla} \delta^{(2)} u}{u^{(2)}} - i\sigma \overline{\nabla} \delta^{(2)} u + \overline{\text{ad}} \left(\tilde{h}_C \delta^{(2)} u \right)^* u_e + \widetilde{\text{ad}} \left(\overline{h}_C \delta^{(2)} u \right)^* u_e \\ &+ \widetilde{\text{ad}} \left(\tilde{h}_C \delta^{(2)} u \right)^* u_e + \widetilde{\text{ad}} \left(\tilde{h}_C^{(1)} \delta^{(2)} u \right)^* u_e + \widetilde{\text{ad}} \left(\tilde{h}_C \delta^{(2)} u \right)^* \delta^{(1)} u \end{aligned} \quad (10.24)$$

$$L\delta^{(3)} u = i\sigma \tilde{\nabla} \delta^{(3)} u - \widetilde{\text{ad}} \left(\tilde{h}_C \delta^{(3)} u \right)^* u_e \quad (10.25)$$

lassen sich die $O(\varepsilon^2)$ -Terme der Gleichung (3.15) in der folgenden Form hinschreiben:

$$\begin{aligned} L\delta^{(3)} u &= Q\delta^{(2)} u + \overline{\text{ad}} \left(\tilde{h}_C \delta^{(1)} u \right)^* \delta^{(1)} u + \widetilde{\text{ad}} \left(\overline{h}_C \delta^{(1)} u \right)^* \delta^{(1)} u + Im^{(2)} \delta^{(1)} u \\ &+ \frac{\partial \overline{\nabla} u^{(1)}}{\partial T} \frac{\delta^{(1)} u}{u^{(1)}} + \overline{\text{ad}} \left(\overline{h}_C \delta^{(1)} u \right)^* u_e \end{aligned} \quad (10.26)$$

Der in Gleichung (10.26) eingeführte Operator $Im^{(2)}$ besteht aus drei Teilen.

$$Im^{(2)} \delta^{(1)} u = Im_{(2)}^{(1)} \delta^{(1)} u + Im_{1(1)}^{(2)} \delta^{(1)} u + Im_{2(1)}^{(2)} \delta^{(1)} u \quad (10.27)$$

Der erste Part von (10.27) entspricht dem $O(\varepsilon^{n=2})$ -Anteil von Gleichung (10.28)

$$Im_{(n)}^{(1)}\delta^{(1)}u = \varepsilon \widetilde{\delta\text{ad}}\left(\tilde{h}_C\delta^{(1)}u\right)^* u + \widetilde{\text{ad}}\left(\varepsilon^n\tilde{h}_C^{(n)}\delta^{(1)}u\right)^* u_e + \widetilde{\text{ad}}\left(\tilde{h}_C\delta^{(1)}u\right)^* \delta u, \quad (10.28)$$

wobei $u = u_e + \varepsilon\delta u$ und $\delta u = \sum_n \varepsilon^{n-1}\delta^{(n)}u$ ist. Der $O(\varepsilon^{n=1})$ -Anteil von Gleichung (10.28) stimmt mit der Beziehung (3.29) überein. Der zweite und dritte Part von (10.27) enthält alle $O(\varepsilon^{n=1})$ -Terme von Gleichung (10.29) und (10.30). Die Elemente von $Im_{(n)}^{(2)}$, mit $n = 0$, entsprechen den Termen von $Q\delta^{(1)}u$ auf der rechten Seite von Gleichung (3.3), die nicht in Gleichung (10.28) enthalten sind.

$$Im_{(n)}^{(2)}\delta^{(1)}u = \left\{ \widetilde{\text{ad}}\left(\varepsilon^n\tilde{h}_C^{(n)}\delta^{(1)}u\right)^* u_e + \overline{\text{ad}}\left(\varepsilon^n\tilde{h}_C^{(n)}\delta^{(1)}u\right)^* u_e + \right. \quad (10.29)$$

$$\left. + \delta\widetilde{\text{ad}}\left(\varepsilon^n\tilde{h}_C^{(n)}\delta^{(1)}u\right)^* u_e + \widetilde{\text{ad}}\left(\varepsilon^n\tilde{h}_C^{(n)}\delta^{(1)}u\right)^* \delta^{(1)}u \right\}$$

$$Im_{(1)}^{(2)}\delta^{(1)}u = \varepsilon \left\{ \delta\widetilde{\text{ad}}\left(\tilde{h}_C\delta^{(1)}u\right)^* u_e + \delta\overline{\text{ad}}\left(\tilde{h}_C\delta^{(1)}u\right)^* u_e + \right. \quad (10.30)$$

$$\left. + \delta^2\widetilde{\text{ad}}\left(\tilde{h}_C\delta^{(1)}u\right)^* u_e + 2\delta\widetilde{\text{ad}}\left(\tilde{h}_C\delta^{(1)}u\right)^* \delta^{(1)}u \right\}$$

Eine Wirkungsbilanzgleichung zweiter Ordnung kann aus (10.26) nach Multiplikation dieser Gleichung von links mit den Elementen $\langle \tilde{h}_C\delta^{(1)}u_i |$ des zu $| \tilde{h}_C\delta^{(1)}u_i \rangle$ dualen Basissystems hergeleitet werden. Aufgrund der Schiefsymmetrie der Klammer ad^* ist erneut gegeben, dass die linke Seite von Gleichung (10.26) verschwindet.

$$\langle \tilde{h}_C\delta^{(1)}u_i, L\delta^{(3)}u_i \rangle = \langle -L\delta^{(1)}u_i, \tilde{h}_C\delta^{(3)}u_i \rangle = 0 \quad (10.31)$$

Die Herleitung der Wirkungsbilanzgleichung (10.35) (zusammen mit (10.42)) aus (10.26) macht die Berechnung der Zustandskorrekturen zweiter Ordnung $\delta^{(2)}u$ zum linearen Wellenzustand $\delta^{(1)}u$ notwendig. Der erste Term auf der rechten Seite von Gleichung (10.26) muss dazu, unter Verwendung von Gleichung (3.24) ($L\delta^{(2)}u_i = Q\delta^{(1)}u_i$), erweitert werden.

$$\langle \delta^{(1)}u_f, \tilde{h}_C L\delta^{(2)}u_i \rangle = \langle \delta^{(1)}u_f, \tilde{h}_C Q\delta^{(1)}u_i \rangle \quad (10.32)$$

Es besteht eine Analogie zwischen der hier vorgestellten Methode und der quantenmechanischen Behandlung zeitabhängiger Störungsprobleme. Mögliche Übergänge der k -ten Seegangsmode vom *initial*-Zustand $|\delta^{(1)}u_i\rangle$ in den *final*-Zustand $|\delta^{(1)}u_f\rangle$ resultieren aus einem Energie- und Impulsaustausch der am Wechselwirkungsprozess beteiligten Seegangsmode. Solange die Voraussetzung für die adiabatische Invarianz der Wellenwirkung erfüllt bleibt ist dies mit einer Änderung der intrinsischen Frequenz σ verbunden. In Gleichung (10.33) kennzeichnet σ_i und σ_f die intrinsische Frequenz der k -ten Mode vor (initial) und nach (final) dem Wechselwirkungsprozess.

$$\begin{aligned} \langle \delta^{(1)}u_f, \tilde{h}_C L\delta^{(2)}u_i \rangle &= \langle \delta^{(1)}u_f, \tilde{h}_C \left[i\sigma_i \tilde{\nabla}\delta^{(2)}u_i - \widetilde{\text{ad}}\left(\tilde{h}_C\delta^{(2)}u_i\right)^* u_e \right] \rangle \\ &= i(\sigma_i - \sigma_f) \langle \delta^{(1)}u_f, \tilde{h}_C \tilde{\nabla}\delta^{(2)}u_i \rangle. \end{aligned} \quad (10.33)$$

Bei der Herleitung von Gleichung (10.33) wurden die Eigenschaften des Funktionals \tilde{h}_C (hermitesch) und der koadjungierte Lie-Algebra Wirkung³ ad^* (schieferhermitesch) ausgenutzt. Durch das

³ ad^* ist die koadjungierte Darstellung der Lie-Algebra \mathfrak{g}

Einsetzen dieser Gleichung (10.33) in die $O(\varepsilon)$ -Gleichung (10.32) erhält man einen Ausdruck für die Zustandskorrekturen zweiter Ordnung $\left| \tilde{h}_C \delta^{(2)} u \right\rangle = -i \nabla_k \left| \tilde{h}_C \tilde{\nabla} \delta^{(2)} u \right\rangle \equiv (ik)^{-1} \left| \tilde{h}_C \tilde{\nabla} \delta^{(2)} u \right\rangle$.

$$\begin{aligned} \alpha \left| \tilde{h}_C \tilde{\nabla} \delta^{(2)} u_i \right\rangle &= \sum_f \left| \delta^{(1)} u_f \right\rangle \left\langle \delta^{(1)} u_f, \tilde{h}_C \tilde{\nabla} \delta^{(2)} u_i \right\rangle \\ &= \sum_f \left| \delta^{(1)} u_f \right\rangle \frac{\left\langle \delta^{(1)} u_f, \tilde{h}_C Q \delta^{(1)} u_i \right\rangle}{i(\sigma_i - \sigma_f)} \end{aligned} \quad (10.34)$$

Bei der Herleitung von Gleichung (10.34) wurde vorausgesetzt, dass es sich bei den Vektoren $\left| \delta^{(1)} u_f \right\rangle$ um eine vollständige Orthogonalbasis $\langle \delta^{(1)} u_i, \delta^{(1)} u_f \rangle = \mathcal{E} \delta_{if}$ (Kronecker Relation δ_{if}) des Raumes der linearen Störungen zu u_e handelt und $\alpha = \sum_f \left| \delta^{(1)} u_f \right\rangle \langle \delta^{(1)} u_f |$ definiert. In diesem Fall kann der Zustandsvektor $\left| \tilde{h}_C \tilde{\nabla} \delta^{(2)} u_i \right\rangle$ nach dem Basissystem $\left| \delta^{(1)} u_f \right\rangle$ entwickelt (erste Zeile (10.34)) werden. Nach Einsetzen der Differentiationsregeln (3.27)

$$\begin{aligned} \overline{\text{ad}} \left(\tilde{h}_C \delta^{(1)} u \right)^* \delta^{(1)} u &= \overline{\nabla}_{ad} \left[\hat{\text{ad}} \left(\tilde{h}_C \delta^{(1)} u \right)^* \delta^{(1)} u \right] - \overline{\nabla}_{ad} \hat{\text{ad}} \left(\tilde{h}_C \delta^{(1)} u \right)^* \delta^{(1)} u \quad \text{und} \\ \widetilde{\text{ad}} \left(\tilde{h}_C \delta^{(1)} u \right)^* \delta^{(1)} u &= \overline{\nabla}_h \cdot \left[\widetilde{\text{ad}} \left(\tilde{h}_C \delta^{(1)} u \right)^* \delta^{(1)} u \right] - \overline{\nabla}_h \cdot \widetilde{\text{ad}} \left(\tilde{h}_C \delta^{(1)} u \right)^* \delta^{(1)} u \\ &\quad - \widetilde{\text{ad}} \left(\overline{\nabla}_h \cdot \tilde{h}_C \delta^{(1)} u \right)^* \delta^{(1)} u \end{aligned}$$

in die Gleichung (10.26) erhält man folgende Beziehung

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\left| \left\langle \delta^{(1)} u_f, \tilde{h}_C Q \delta^{(1)} u_i \right\rangle \right|^2}{\alpha k^3 (\sigma_f - \sigma_i)} + i \left\langle \delta^{(1)} u_i, \tilde{h}_C \left[N^{(2)} + Im^{(2)} \right] \delta^{(1)} u_i \right\rangle - \\ &\quad - i \left\langle \delta^{(1)} u_i, \tilde{h}_C \overline{\nabla} \left[\nabla_k \widetilde{\text{ad}} \left(\tilde{h}_C \delta^{(1)} u_i \right)^* \delta^{(1)} u_i + \widetilde{\text{ad}} \left(\nabla_k \tilde{h}_C \delta^{(1)} u_i \right)^* \delta^{(1)} u_i \right] \right\rangle \\ &\quad + \left\langle \delta^{(1)} u_i, \tilde{h}_C \frac{\partial \overline{\nabla} u_i^{(1)}}{\partial T} \frac{\delta^{(1)} u_i}{u_i^{(1)}} \right\rangle + \left\langle \delta^{(1)} u_i, \tilde{h}_C \overline{\text{ad}} \left(\tilde{h}_C \delta^{(1)} u_i \right)^* u_e \right\rangle. \end{aligned} \quad (10.35)$$

Bei der Herleitung des ersten Terms auf der rechten Seite von (10.35) wurde $\tilde{h}_C \delta^{(1)} u = (ik)^2 \delta^{(1)} u$ gesetzt. Außerdem wurde in (10.35) die Abkürzung $N^{(2)}$ eingeführt.

$$\begin{aligned} N^{(2)} \delta^{(1)} u &= \overline{\nabla} \cdot \nabla_k \widetilde{\text{ad}} \left(\tilde{h}_C \delta^{(1)} u \right)^* \delta^{(1)} u + \overline{\nabla} \cdot \widetilde{\text{ad}} \left(\nabla_k \tilde{h}_C \delta^{(1)} u \right)^* \delta^{(1)} u \\ &\quad + \widetilde{\text{ad}} \left(\overline{\nabla} \cdot \nabla_k \tilde{h}_C \delta^{(1)} u \right)^* \delta^{(1)} u \end{aligned} \quad (10.36)$$

Die in der zweiten Zeile von Gleichung (10.35) zusammengefassten Termen lassen sich nach Einsetzen der $O(\varepsilon^1)$ -Gleichung (3.24) zu einem Ausdruck für die Divergenz der totalen Zeitableitung von $I = \mathcal{E}\mathcal{F}/\sigma$ umformen. Aufgrund der Fußnote 1 in Kapitel 10.3 und der Rechnung⁴ aus Kapitel 3.2.2 ist

$$\begin{aligned} \left\langle \delta^{(1)} u, \tilde{h}_C \widetilde{\text{ad}} \left(\tilde{h}_C \delta^{(1)} u \right)^* \delta^{(1)} u \right\rangle &= (dI/dT) \sigma = 0 \quad \text{und damit} \\ \left\langle \delta^{(1)} u, \tilde{h}_C \overline{\nabla} \cdot \nabla_k \left[\widetilde{\text{ad}} \left(\tilde{h}_C \delta^{(1)} u \right)^* \delta^{(1)} u \right] \right\rangle &= -\overline{\nabla} \cdot \nabla_k \left[\left(\frac{d\mathcal{E}\mathcal{F}/\sigma}{dT} \right) \sigma \right] - \mathcal{D} \left(\widetilde{\text{ad}} \left(\tilde{h}_C \delta^{(1)} u \right)^* \delta^{(1)} u \right). \end{aligned} \quad (10.37)$$

Um die Rechnung übersichtlicher zu gestalten wurde in Gleichung (10.37) der Operator \mathcal{D} definiert.

$$\mathcal{D}(\boxplus) := \left\langle \delta^{(1)} u, \overline{\nabla} \cdot \left[\nabla_k \tilde{h}_C \cdot \boxplus \right] + \left(\overline{\nabla} \tilde{h}_C \right) \nabla_k \boxplus \right\rangle$$

⁴Der dritte Term von $Im^{(1)}$ (3.29) wurde auf die linke Seite von Gleichung (3.28) gezogen.

Nach dem Zerlegen des ersten Terms auf der rechten Seite von (10.37)

$$\frac{d\mathcal{E}\mathcal{F}/\sigma}{dT} \sigma = \frac{d\mathcal{E}\mathcal{F}}{dT} - \frac{\mathcal{E}\mathcal{F}}{\sigma} \frac{d\sigma}{dT} \quad \text{mit} \quad \frac{d\mathcal{E}\mathcal{F}}{dT} \equiv \frac{\partial\mathcal{E}\mathcal{F}}{\partial T} + \bar{\nabla} \cdot \nabla_k \mathcal{E}\mathcal{F} \sigma \quad (10.38)$$

kann der Beitrag $\sim d\mathcal{E}\mathcal{F}/dT$ in Gleichung (10.37) gegen die zusammengefassten Terme der dritten Zeile (10.39), (10.40) gekürzt werden. Die mit \mathcal{D} und \mathcal{R} abgekürzten Terme werden dabei nicht betrachtet.

$$\begin{aligned} \left\langle \delta^{(1)}u, \tilde{h}_C \frac{\partial \bar{\nabla} u_i^{(1)}}{\partial T} \frac{\delta^{(1)}u_i}{u_i^{(1)}} \right\rangle &= -i \left\langle \delta^{(1)}u, \tilde{h}_C \bar{\nabla} \cdot \nabla_k \left[\frac{\partial \tilde{\nabla} \delta^{(1)}u_i}{\partial T} \right] \right\rangle = \\ &= -i \bar{\nabla} \cdot \nabla_k \left[\frac{\partial \mathcal{E}\mathcal{F}}{\partial T} \right] + i \bar{\nabla} \cdot \nabla_k \left\langle \delta^{(1)}u_i, \frac{\partial \tilde{h}_C}{\partial T} \tilde{\nabla} \delta^{(1)}u_i \right\rangle + i \mathcal{D} \left(\frac{\partial \tilde{\nabla} \delta^{(1)}u_i}{\partial T} \right) \end{aligned} \quad (10.39)$$

Durch Einsetzen der Entwicklungsgleichung nullter Ordnung (3.20) in den letzten Term auf der rechten Seite von Gleichung (10.35) kann dieser wie folgt umgeformt werden:

$$\begin{aligned} \left\langle \delta^{(1)}u_i, \tilde{h}_C \bar{\text{ad}} \left(\tilde{h}_C \delta^{(1)}u_i \right)^* u_e \right\rangle &= - \left\langle \delta^{(1)}u_i, \tilde{h}_C \bar{\nabla} \cdot \nabla_k \left(\bar{\nabla} \cdot \nabla_k \left[i \sigma \tilde{\nabla} \delta^{(1)}u \right] \right) - \tilde{h}_C \mathcal{R} \delta^{(1)}u_i \right\rangle \\ &= -i \bar{\nabla} \cdot \nabla_k \left(\bar{\nabla} \cdot \nabla_k [\sigma \mathcal{E}\mathcal{F}] \right) + \left\langle \delta^{(1)}u_i, \tilde{h}_C \mathcal{R} \delta^{(1)}u_i \right\rangle \\ &\quad + \mathcal{D} \left(\bar{\nabla} \cdot \nabla_k \left[i \sigma \tilde{\nabla} \delta^{(1)}u \right] \right) + \bar{\nabla} \cdot \nabla_k \left[\mathcal{D} \left(i \sigma \tilde{\nabla} \delta^{(1)}u \right) \right]. \end{aligned} \quad (10.40)$$

In Gleichung (10.40) wurde der Operator \mathcal{R} definiert.

$$\begin{aligned} \mathcal{R} \delta^{(1)}u_i &:= i \bar{\nabla} \cdot \nabla_k \bar{\text{ad}} \left(\tilde{h}_C \delta^{(1)}u_i \right)^* u_e + \\ &\quad + \bar{\nabla} \cdot \nabla_k \left[\bar{\nabla} \cdot \nabla_k \bar{\text{ad}} \left(\tilde{h}_C \delta^{(1)}u_i \right)^* u_e + \bar{\text{ad}} \left(\bar{\nabla} \cdot \nabla_k \tilde{h}_C \delta^{(1)}u_i \right)^* u_e \right] \end{aligned}$$

Die Energiekorrektur zweiter Ordnung zur Energie des Grundzustandes u_e ist durch den Realteil von Gleichung (10.35) nach Multiplikation mit $(ik)^{-1}$ gegeben. Der Wechselwirkungsterm entspricht dem Betragsquadrat

$$\left| \left\langle \delta^{(1)}u_f, \tilde{h}_C Q \delta^{(1)}u_i \right\rangle \right|^2 = \left\langle \delta^{(1)}u_i, \tilde{h}_C Q \delta^{(1)}u_f \right\rangle \left\langle \delta^{(1)}u_f, \tilde{h}_C Q \delta^{(1)}u_i \right\rangle \quad (10.41)$$

geteilt durch die Differenz der intrinsischen Frequenzen σ_i und σ_f . Für den Grenzfall voneinander unabhängiger Seegangsmoden ist der *initial*-Eigenzustand $\delta^{(1)}u_i$ gleich dem *final*-Eigenzustand $\delta^{(1)}u_f$. Dann entspricht der erste Term auf der rechten Seite dem Quotienten von $|dI_i/dT|^2 = 0$ und $(\sigma_i - \sigma_f)|_{i=f} = 0$. Dabei wurde Beziehung (10.42) ausgenutzt, die aus der der Entwicklungsgleichung erster Ordnung in ε folgt.

$$\text{Re} \left\langle \delta^{(1)}u_i, \tilde{h}_C Q \delta^{(1)}u_i \right\rangle = \left(\frac{\partial \tilde{E}/\sigma_i}{\partial T} + \bar{\nabla} \left(\tilde{E}/\sigma_i \right) \cdot \underline{c}_g + \nabla_k \left(\tilde{E}/\sigma_i \right) \cdot \underline{k} \right) \sigma_i (ik)^3 \quad (10.42)$$

Setzt man (10.42) für den Fall *initial* = *final* in Gleichung (10.35) ein und multipliziert alle Terme mit i so bleiben nur wenige Terme in (10.35) bestehen die reellwertige Beiträge enthalten. Die Gleichung enthält noch den ersten Term auf der rechten Seite von (10.35), der die Wechselwirkung linearer Seegangsmoden beschreibt, und jene Elemente des $Im^{(2)}$ -Terms die in der zweiten Zeile von (10.21) zusammengefasst worden sind. Die reellwertigen $Im^{(2)}$ -Terme sind bei der Herleitung seegangsabhängiger Bilanzgleichungen für die mittlere Strömung vernachlässigt worden. Sie werden auch hier nicht betrachtet. Der nichtlineare Beitrag zur Wirkungsbilanzgleichung des Seegangs besteht aus dem ersten Term in Gleichung (10.35). Für *initial* \neq *final* ist dieser Term von Null verschieden. Die nichtlineare Wechselwirkung der Seegangsmoden ist aber nicht das Thema dieser Arbeit und wird auch nicht im numerischen Wellenmodell (k -Modell) behandelt. Deshalb wird in diesem Abschnitt darauf verzichtet den Wechselwirkungsterm für *initial* \neq *final* herzuleiten.

10.5 Anhang A4: Der Radiationstress-Tensor eines 3-dimensionalen, inkompressiblen Fluids

Der Radiationstress-Tensor wird nun für das Beispiel einer dreidimensionalen Strömung in einem inkompressiblen und geschichteten Fluid berechnet. Die Vorgehensweise gliedert sich wie folgt: Zunächst wird die Gleichung (4.1) für eine rotationsfreie Boussinesq-Strömung gelöst. Anschließend wird die Inkompressibilität des Mediums gefordert, wodurch sich Bilanzgleichungen für die mittlere Strömung ergeben.

Das System dreidimensionaler Boussinesq-Gleichungen ist hamiltonisch [Ab86] bezüglich der folgenden Poisson Klammer:

$$\{F, H\}(\underline{v}, \rho) = \int_{\mathcal{D}} \left\{ \underline{v} \cdot \left[\left(\frac{\delta H}{\delta \underline{v}} \cdot \nabla \right) \frac{\delta F}{\delta \underline{v}} - \left(\frac{\delta F}{\delta \underline{v}} \cdot \nabla \right) \frac{\delta H}{\delta \underline{v}} \right] + \rho \left[\frac{\delta H}{\delta \underline{v}} \cdot \nabla \frac{\delta F}{\delta \rho} - \frac{\delta F}{\delta \underline{v}} \cdot \nabla \frac{\delta H}{\delta \rho} \right] \right\} d^3 \underline{x}$$

und dem Hamiltonfunktional $H(\underline{v}, \rho)$

$$H(\underline{v}, \rho) = \int_{\mathcal{D}} \left\{ \frac{|\underline{v}|^2}{2} + \frac{\rho}{\rho_*} g z \right\} d^3 \underline{x} \quad , \quad C(q, \rho) = \int_{\mathcal{D}} \{ \mathcal{C}(q, \rho) + \lambda q \} d^3 \underline{x} . \quad (10.43)$$

Die Differenz der Dichte $\rho(\underline{x}, T)$ von der konstanten Referenz-Dichte $\rho_* = 1$ wird nur in dem von g abhängigen Term nicht vernachlässigt. Nach dem Einsetzen von $\delta H / \delta \underline{v} = \underline{v}$, $\delta H / \delta \rho = g z$ in die Poisson-Klammer der Boussinesq-Strömung und partieller Integration der jeweils ersten Terme in den beiden Klammern erhält man die folgende Beziehung.

$$\begin{aligned} \{F, H\}(\underline{v}, \rho) &= - \int_{\mathcal{D}} \left\{ \frac{\delta F}{\delta \underline{v}} \cdot (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} + \left(\frac{\delta F}{\delta \underline{v}} \cdot \nabla \right) \frac{|\underline{v}|^2}{2} + (\underline{v} \cdot \nabla \rho) \frac{\delta F}{\delta \rho} + \frac{\delta F}{\delta \underline{v}} \cdot \rho g \nabla z \right\} d^3 \underline{x} \\ &= - \int_{\mathcal{D}} \left\{ \frac{\delta F}{\delta \underline{v}} \cdot \mathbb{P}((\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} + \rho g \nabla z) + (\underline{v} \cdot \nabla \rho) \frac{\delta F}{\delta \rho} \right\} d^3 \underline{x} \end{aligned} \quad (10.44)$$

Die in Gleichung (10.44) eingeführte Transformation $\mathbb{P}(\underline{v}) = \underline{v}$ bildet das Vektorfeld $\underline{v} \in \mathcal{X}(D)$ auf das quellen- und senkenfreie Feld $\underline{v} \in \mathcal{X}_{div}(D)$ ab ($div \underline{v} = 0$). Nach dem Helmholtz Theorem kann \underline{v} in die L^2 orthogonale Summe von \underline{v} und dem Gradienten der Funktion p zerlegt werden $\underline{v} = \underline{v} - \nabla p$. Die Funktion p erfüllt das zu (10.44), (10.43a) gehörende Neumann Problem und ist gleich dem Druck. Deshalb ist $\mathbb{P}(\underline{v}) = \underline{v} = \underline{v} + \nabla p$ gegeben und

$$\mathbb{P}((\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} + \rho g \nabla z) = (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} + \rho g \nabla z + \nabla p . \quad (10.45)$$

Das Casimirfunktional $C(q, \rho)$ ist eine Invariante der Bewegung und setzt sich aus den reellwertigen Funktionen $\mathcal{C}(q, \rho)$ und dem Produkt λq zusammen. Die potentielle Vorticity ist gleich $q = (\nabla \times \underline{v}) \cdot \nabla \rho$ und λ ist eine Konstante. In diesem Abschnitt wird der Beitrag des Casimirfunktionals C zur zweiten Variation $\delta^2 H_C$ des Funktionals $H_C = H + C$ (4.1) nicht berücksichtigt. Er beschreibt den Effekt variabler Strömungsfelder v_e auf den seegangsinduzierten Impulsfluss in der Bilanzgleichung der mittleren Strömung. Das verwendete Wellenmodell (k -Modell) enthält bereits eine Formulierung der Strömungsrefraktion als Dopplerterm in der Dispersionsrelation des Seegangs. Aus diesem Grunde wäre es ein Fehler, den Beitrag von $C(\underline{v}, \rho)$ bei der praktischen Umsetzung der analytischen Ergebnisse in das gekoppelte Modell für Seegang und Strömung zu berücksichtigen. Die Forderung $C(q, \rho) = 0$ setzt voraus, dass der Gleichgewichtszustand $(\underline{v}_e, \rho_e)$ gleich dem Grundzustand $(\underline{v}_e, \rho_e) = (\underline{0}, 0)$ ist. Nur dann verschwindet die erste Variation von H (10.46a), ausgewertet

am Fixpunkt $(\underline{v}, \rho) = (\underline{v}_e, \rho_e)$. Der Gleichgewichtszustand ist formal stabil, wenn die zweite Variation von H (10.46b) ihr Vorzeichen für alle Zeiten beibehält.

$$\delta H = \int_{\mathcal{D}} [\underline{v} \cdot \delta \underline{v} + gz \delta \rho] d^3 \underline{x} \quad \text{und} \quad \delta^2 H = \int_{\mathcal{D}} |\delta \underline{v}|^2 d^3 \underline{x} \quad (10.46)$$

Die Ableitungen $\mathfrak{L}_{\delta \underline{v}}$ und $\mathfrak{L}_{\delta \rho}$ ($\mathfrak{L}_{\delta u_i} := \tilde{h} \delta u_i$) sind gleich

$$\mathfrak{L}_{\delta \underline{v}} := \frac{1}{2} \frac{\delta(\delta^2 H)}{\delta(\delta \underline{v})} = \delta \underline{v} \quad \text{und} \quad \mathfrak{L}_{\delta \rho} := \frac{1}{2} \frac{\delta(\delta^2 H)}{\delta(\delta \rho)} = 0. \quad (10.47)$$

Die Poisson-Klammer des gestörten Systems (4.1) kann in gleicher Weise wie (10.44) umgeformt werden. Nach dem Einsetzen der Operatoren $\mathfrak{L}_{\delta^{(1)} \underline{v}}$ und $\mathfrak{L}_{\delta^{(1)} \rho}$ in (4.1) und dem orthogonalen Zerlegen (10.45) von $\mathbb{P}((\delta^{(1)} \underline{v} \cdot \nabla) \delta^{(1)} \underline{v}) = (\delta^{(1)} \underline{v} \cdot \nabla) \delta^{(1)} \underline{v} + \nabla \delta^{(1)} p$ erhält man die folgende Gleichung für die nichtlineare Dynamik der Zustandsvariablen $\underline{u} = (\rho, \underline{v})$.

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \underline{u}}{\partial T} \right|_{\mathcal{E}} = \overline{\text{ad}} \left(\tilde{h}_C \delta^{(1)} \underline{u} \right)^* \delta^{(1)} \underline{u} &= - \int_{\mathcal{D}} \left\{ \frac{\delta(\delta^{(1)} \underline{u})}{\delta(\delta^{(1)} \underline{v})} \cdot \left[\overline{\nabla} \cdot \left(\delta^{(1)} \underline{v} \otimes \delta^{(1)} \underline{v} \right) + \overline{\nabla} \delta^{(1)} p \right] \right. \\ &\quad \left. + \overline{\nabla} \cdot \left(\delta^{(1)} \rho \delta^{(1)} \underline{v} \right) \frac{\delta(\delta^{(1)} \underline{u})}{\delta(\delta^{(1)} \rho)} \right\} d^3 \underline{x}. \end{aligned} \quad (10.48)$$

Bei der Herleitung der Poisson-Klammer auf der rechten Seite von (10.49) wurde $\text{div}(\delta^{(1)} \underline{v}) = 0$ gefordert. Daher bildet die Transformation \mathbb{P} zwei divergenzfreie Vektorfelder aufeinander ab. Die Dichteschwankung $\delta^{(1)} \rho$ ist gleich 1. Formal entspricht das Resultat für $u_i = \rho$ (10.50) und $u_i = \underline{v}$ (10.51) den Ergebnissen von Kapitel (4.1) für ein zwei-dimensionales, homogenes und inkompressibles Fluid. Unter der Voraussetzung, dass die mittleren Prozesse auf einer $(x, y, z = \text{konst.})$ -Koordinatenfläche stattfinden, sind die beiden Formulierungen äquivalent. Siehe dazu auch Kapitel 4.3, Abschnitt 4.3.2.

$$0 = - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{\nabla} \cdot \delta^{(1)} \underline{v} d\vartheta \quad (10.50)$$

$$\left. \frac{d\underline{v}_e}{dT} + \left\langle \frac{\partial \delta \underline{v}}{\partial T} \right\rangle \right|_{\mathcal{E}} = - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \overline{\nabla} \cdot \left(\delta^{(1)} \underline{v} \otimes \delta^{(1)} \underline{v} \right) + \overline{\nabla} \delta^{(1)} p \right\} d\vartheta \quad (10.51)$$

Die in den Kapiteln 7.2 und 7.3 vorgestellten Ergebnisse numerischer Modellrechnungen beruhen auf der Formulierung (10.50), (10.51) des seeganginduzierten Antriebs der mittleren Strömung. Der Beitrag entspricht den Ergebnissen früherer Arbeiten (G. Melor [Mel03]).

10.6 Anhang A5: Verwendete Symbole und Bezeichnungen

Allgemeine Bezeichnungen	
[Kurzzeichen, Jahreszahl] (Zahl), [Zahl], Zahl <i>BSH</i> <i>GKSS</i> <i>DWD</i> <i>EZMW</i>	Literaturhinweis Formel, Abbildung, Kapitel <u>B</u> undesamt für <u>S</u> eeschiffahrt und <u>H</u> ydrographie Forschungszentrum Geesthacht <u>D</u> eutscher <u>W</u> etter <u>d</u> ienst <u>E</u> uropäisches <u>Z</u> entrum für <u>m</u> ittelfristige <u>W</u> ettervorhersage
<i>BSH</i> <i>mod</i> <i>WAM</i> <i>k</i> -Modell <i>LM</i> -Modell <i>GME</i> -Modell	Zirkulationsmodell des <i>BSH</i> Wellenmodell der dritten Generation: Die Seegangsdynamik wird durch numerische Integration der Wellenenergie- bzw. Wirkungsbilanzgleichung modelliert, ohne die spektrale Form vorher einzuschränken [Kom94]. Wellenmodell der dritten Generation. Von der <i>GKSS</i> für den Einsatz im küstennahen Raum geschaffen. Lokales Atmosphärenmodell des <i>DWD</i> Globales Atmosphärenmodell des <i>DWD</i>
<i>MUSE</i> <i>UTC</i> <i>NN</i> <i>LHS</i> und <i>RHS</i> <i>WKB</i>	Projekt: <u>M</u> odellgestützte <u>U</u> ntersuchungen zu <u>S</u> turmfluten mit sehr geringen <u>E</u> intrittswahrscheinlichkeiten Coordinated Universal Time Normalnull: Bezugsfläche für Höhenangaben Die linke und rechte Seite einer Gleichung. Wellenansatz von <u>W</u> enzel, <u>K</u> ramer und <u>B</u> rillouin.
Mathematische und Physikalische Bezeichnungen (1)	
\mathbb{C} $\alpha^* \in \mathbb{C}$ $\{1.\text{Summand}\} + c.c.$ \mathbb{R} \mathbb{R}^3 $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^3$ $\mathcal{X}_{div}(\mathcal{D})$ $\nabla(\cdot) = \partial(\cdot)/\partial \underline{x}$ ∇_h und ∇_{ad} $\overline{\nabla} \delta^{(l)} \mu$ $\tilde{\nabla} \delta^{(l)} \mu$ $\partial_\chi(\cdot) = \partial(\cdot)/\partial \chi$ $d_\chi(\cdot) = d(\cdot)/d\chi$ $\delta_\chi(\cdot) = \delta(\cdot)/\delta \chi$ $\langle \alpha \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha(\vartheta) d\vartheta$ $\langle \alpha $ und $ \beta \rangle$ $\underline{\delta} \equiv \delta_{ij}$ Θ, \boxplus	Menge der Komplexen Zahlen Zu $\alpha \in \mathbb{C}$ komplex-konjugierte Zahl. <i>c.c.</i> bedeutet das Komplex-Konjugierte des 1.Summanden Menge der Reellen Zahlen Dreidim. Vektorraum über dem Körper der Reellen Zahlen. Gebiet im dreidimensionalen Vektorraum \mathbb{R}^3 Menge der divergenzfreien Vektorfelder in \mathcal{D} Der Nabla-Operator angewendet auf (\cdot) Allgemeine Bezeichnung für die Ableitungs-Operatoren des Hamiltonfunktionals h_C und der koadj. Wirkung ad^* . Der Nabla-Operator angewendet auf die Amplitudenfunktion von $\delta^{(l)} \mu$ ($l \in \mathbb{N}$) Der Nabla-Operator angewendet auf die Phasenfunktion von $\delta^{(l)} \mu$ ($l \in \mathbb{N}$) Die partielle Ableitung von (\cdot) nach χ . Die totale Ableitung von (\cdot) nach χ . Die Funktionalableitung von (\cdot) nach χ . Der Mittelungsoperator über die Phase ϑ linearer Seegangsmoden. Nach der <i>bra - c - ket</i> Notation von Dirac wird das Skalarprodukt $\langle \alpha, \beta \rangle$ in das Produkt des <i>ket</i> -Vektors $ \beta \rangle$ mit dem dualen <i>bra</i> -Vektor $\langle \alpha $ zerlegt. Der Kronecker-Tensor Platzhalter

Mathematische und Physikalische Bezeichnungen (2)	
\mathcal{M} $T_m\mathcal{M}$ $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ $\omega^\pm(\xi, \eta)$, $\xi, \eta \in T_m\mathcal{M}$ \mathcal{G} \mathfrak{g} \mathfrak{g}^* $\mathcal{O}(\mathcal{G})$ $ad_\xi^*\mu$ $Ad_{g^{-1}}\mu$ $\xi_{\mathfrak{g}^*}(\mu) = -ad_\xi^*\mu$	<p>Manigfaltigkeit: Eine glatte Oberfläche die lokal wie der \mathbb{R}^n aussieht.</p> <p>Tangentialraum der Manigfaltigkeit \mathcal{M} am Punkt m</p> <p>Raum der glatten Funktionen auf der Manigfaltigkeit \mathcal{M}</p> <p>Symplektische Form ω^\pm auf der Manigfaltigkeit \mathcal{M}: Das ist eine abgeschlossene, nicht ausgeartete 2-Form.</p> <p>Lie-Gruppe</p> <p>Lie-Algebra</p> <p>Zu \mathfrak{g} duale Lie-Algebra</p> <p>Koadjungierter Orbit der Lie-Gruppe \mathcal{G}</p> <p>Koadjungierte Wirkung des Lie-Algebra-Elements $\xi \in \mathfrak{g}$ auf die Bahnkurve $\mu(t) \in \mathcal{O}$ im Phasenraum.</p> <p>Koadjungierte Wirkung des Lie-Gruppen-Elements $g \in \mathcal{G}$ auf die Bahnkurve $\mu(t) \in \mathcal{O}$ im Phasenraum.</p> <p>Infinitesimale Erzeugende der koadjungierten Lie-Algebra Wirkung</p>
$\langle \alpha, \beta \rangle$; ($\alpha \in \mathbb{V}, \beta \in \mathbb{V}^*$) $[\xi, \eta] : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ mit $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$ $G(\mu) = \{F(\mu), H(\mu)\}$ Für $[\cdot, \cdot] \in \mathfrak{g}$ und $\mu \in \mathfrak{g}^*$ ist $\{F, H\} = -\left\langle \mu, \left[\frac{\delta F}{\delta \mu}, \frac{\delta H}{\delta \mu} \right] \right\rangle$. $(\mathcal{P}, \{\cdot, \cdot\})$	<p>Paarung (bilineare Abbildung) des Vektorraums \mathbb{V} mit seinem Dualraum \mathbb{V}^*. Hydrodynamische Beispiele: $\mathbb{V} \subset \mathbb{R}^3$, $\mathbb{V}^* \subset \mathbb{R}^3$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist das Skalarprodukt.</p> <p>Bilineare, schiefsymmetrische Jacobi-Lie Klammer</p> <p>Poisson-Klammer: Bilineare, schiefsymmetrische Klammer die Funktionen $F, H \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$ auf $G \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$ abbildet. Wenn H eine Hamiltonfunktion ist, dann ist $G = \dot{F}$.</p> <p>Poisson Manigfaltigkeit: Die Manigfaltigkeit \mathcal{P} zusammen mit der Poissonklammer $\{\cdot, \cdot\}$.</p>
α, β q_i, p^i T, V $L(q^i, p_i) = T - V$ $H(q_i, p^i) = \langle \dot{q}_i, p^i \rangle - L(q_i, p^i)$ $L(\mu), H(\mu)$ J_{ij} $X_H = J_{ij} \delta H(\mu) / \delta \mu_j$ $C(\mu)$, mit $\{C, G\} = 0$, wobei $C, H : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{C}(q) \in \mathbb{R}$ $H_C(\mu) = H(\mu) + C(\mu)$ δH_C $\delta^2 H_C$ $h_C^{(n)} = \frac{\delta(\delta^n H_C)}{\delta(\delta \mu)}$ $\bar{h}_C^{(n)}$ $\tilde{h}_C^{(n)}$	<p>Separationskonstanten der kanonischen Störungstheorie</p> <p>i-te generalisierte Koordinate und Impulskomponente</p> <p>Kinetische Energie, Potentielle Energie</p> <p>Kanonisches Lagrangefunktional</p> <p>Kanonisches Hamiltonfunktional</p> <p>Nicht-kanonisches Lagrange- und Hamiltonfunktional</p> <p>Schiefsymmetrischer ko-symplektischer Tensor</p> <p>Zum Hamiltonfunktional $H(\mu)$ und dem ko-symplektischen Tensor J_{ij} gehörendes Hamiltonsches Vektorfeld $X_H = \dot{\mu}$.</p> <p>Casimirfunktional</p> <p>Reellwertige Funktion der Potentiellen Vorticity q.</p> <p>Die Summe von Hamilton- und Casimirfunktional.</p> <p>Die erste Variation des Hamilton-Casimir-Funktional.</p> <p>Die zweite Variation des Hamilton-Casimir-Funktional.</p> <p>Die Ableitung der n-ten Variation von H_C nach dem Dynamischen Vektor des Seegangs $\delta \mu$.</p> <p>Der Anteil von $h_C^{(n)}$ der Ableitungen der Amplitudenfunktion von $\delta^{(l)} \mu$ ($l \in \mathbb{N}, l \leq n$) enthält.</p> <p>Der Anteil von $h_C^{(n)}$ der ausschließlich Ableitungen der Phasenfunktion von $\delta^{(l)} \mu$ ($l \in \mathbb{N}, l \leq n$) enthält.</p>

Mathematische und Physikalische Bezeichnungen (3)	
$O(\varepsilon^n)$ $\varepsilon \in \mathbb{R}; \varepsilon \ll 1$ $\tilde{\underline{x}} = \varepsilon \underline{X}, t = \varepsilon T \quad (\varepsilon \ll 1)$ $\underline{X} = \tilde{\underline{x}}/\varepsilon, T = t/\varepsilon \quad (\varepsilon \ll 1)$ $\ \tilde{\underline{x}}\ $ und $\ \underline{X}\ $ $\{\tilde{\underline{x}}, \tilde{\underline{y}}, \tilde{\underline{z}}\}$ $\{\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}\}$ $\{\tilde{\underline{x}}, \tilde{\underline{y}}, \tilde{\underline{z}}\}$ $\underline{a} = (a, b, c)$ $s(\zeta)$ ζ	n -te Ordnung der Störungsentwicklung Reellwertiger Parameter der Störungsrechnung $\mu = \mu_e + \varepsilon \delta \mu$ Ortsvektor und Zeit-Koordinate des Seegangs Ortsvektor und Zeit-Koordinate des mittleren Seegangs Die Norm der Ortsvektoren $\tilde{\underline{x}}$ und \underline{X} . Basisvektoren des Koordinatensystems in dem die Dynamik des Wasserkörpers betrachtet wird. Basisvektoren des Koordinatensystems in dem die Dynamik der Eulerschen Strömung betrachtet wird. Basisvektoren des Koordinatensystem in dem die Dynamik des Seegangs betrachtet wird. Lagrange Koordinaten Koordinatenflächen des σ -Koordinatensystems Vertikaler Index des σ -Koordinatensystems
λ und π $\underline{k}, k = 2\pi/\lambda$ $\eta(\Lambda(\underline{X})) = k(\underline{X})/k_0$ $\Lambda(\underline{X}, T)$ $\sigma = \sqrt{gk \tanh(kh)}$ $\Omega(\underline{k}) = \sigma + \underline{k} \cdot \langle \underline{v} \rangle$ $c_g = \partial\sigma/\partial k$ $c = \sigma/k$ $a^{(n)}$ $\mathcal{E} = a^{(1)}(a^{(1)})^*$ $\tilde{E} = \mathcal{E}\mathcal{F}$ $\tilde{E} \sim \mathcal{E}$ $\mathcal{F} \in \mathbb{R}$ $E = \rho g \mathcal{E} \mathcal{F} / 2$ $E(k(\underline{X}, T), \underline{X}, T)$ H_s T_{m1} $m_n(E(f)) = \int f^n E(f) df$ $\Theta^k = \vartheta^k + \varepsilon \theta^k$ θ^k ϑ^k mit $\dot{\vartheta}^k = \sigma(k)$ $\mu^{(n)} = a^{(n)} \exp(i\theta^k/\varepsilon)$ $I_k = \mathcal{E}(k)\mathcal{F}/\sigma$ $F_{\underline{X}} = \underline{c}_g I_k$ $\underline{M}^w = \rho_w \underline{v}_{sd}$	Wellenlänge und Periode des Seegangs Wellenzahlvektor, Wellenzahl des Seegangs Refraktionsindex der Seegangsmoden Von \underline{X} und T abhängigen Parameter (Wassertiefe, etc.) die Propagation und Refraktion des Seegangs beeinflussen. Intrinsische Frequenz linearer Seegangsmoden Dispersionsrelation linearer Seegangsmoden Die Gruppengeschwindigkeit des Seegangs Die Phasengeschwindigkeit des Seegangs Komplexe Amplitude n -ter Ordnung der <i>WKB</i> -Entwicklung des Seegangs. Das Betragsquadrat der Amplitude linearer Seegangsmoden Amplitudenquadrat des Seegangs multipliziert mit \mathcal{F} Die Energie linearer Wellen: Das Betragsquadrat des Geschwindigkeitsvektors linearer Seegangsmoden. Skalarer Faktor der den Einfluss variabler Strömungsprofile auf die zeitliche Entwicklung der Wellen und die Dynamik der seegangsinduzierten Strömung beschreibt. Die phasengemittelte Energie linearer Seegangsmoden. Das modellierte Energie-Spektrum des Seegangs wird auch mit E bezeichnet. Es entspricht dem Amplitudenquadrat \mathcal{E} . Die Signifikante Wellenhöhe Mittlere Periode $T_{m1} = m_0/m_1$ des Spektrums $E(f)$ n -tes Moment des kontinuierlichen Spektrums $E(f)$ (Frequenz $f = \sigma/2\pi$) Die Phasenfunktion der <i>WKB</i> -Seegangsmoden. Die Phasenfunktion der langsam und auf großen räumlichen Skalen veränderlichen <i>WKB</i> -Seegangslösung. Die Winkelvariable (Phase) der Seegangsmoden in Ausbreitungsrichtung der Wellen. Langsam und auf großen räumlichen Skalen variierender Anteil des <i>WKB</i> -Ansatzes. Die Wirkungsvariable der Seegangsmoden. Der räumlicher Fluss der Größe Wellenwirkung. Der Seegangsimpuls.

Mathematische und Physikalische Bezeichnungen (4)	
$\mu = \mu_e + \varepsilon \delta \mu$, $u = u_e + \varepsilon \delta u$ μ_e, u_e $\delta \mu, \delta u$ $\mu_{st} = \langle \delta \mu \rangle, u_{st} = \langle \delta u \rangle$	Dynamischer Vektor: Zusammenfassung aller dynamischen Größen in einen Vektor. z.B. Beispiel1 (Kap. 4.1): $u = \underline{v}$, Beispiel2 (Kap. 4.2): $u = (h, \underline{m})$ Dynamischer Vektor der Eulerschen Strömung Dynamischer Vektor des Seegangs Dynamischer Vektor der Stokesdrift
p δp $\delta^{(1)} p$ p_{hs}	Druck Druckfluktuationen aufgrund von Seegang Lineare Druckfluktuationen aufgrund von Seegang Hydrostatischer Druck
D $\hat{\eta}$ $\tilde{\eta}$ $\tilde{\eta} = \delta^{(1)} h$ $h_e = D + \hat{\eta}$ $h = h_e + \hat{\eta} + \tilde{\eta}$; $\tilde{\eta} = \delta^{(1)} h$	Topographische Tiefe Mittlerer Wasserstand Seegangsbedingte Störung des Wasserstandes. Linearisierte Störung des Wasserstandes durch Seegang. Topographische Tiefe plus mittlerem Wasserstand Topographische Tiefe plus mittlerem Wasserstand und seegangsbedingter Störung des Wasserstandes.
ψ ψ_e $\delta \psi$ $\delta^{(1)} \psi$	Die Stromfunktion: 2D Strömungsfeld $\underline{v} = \nabla \times (\psi \hat{\underline{z}})$ Die Stromfunktion der Eulerschen Strömung Die Stromfunktion des Seegangsfeldes. Die Stromfunktion linearer Seegangsmoden.
\underline{v} \underline{v}_e $\delta \underline{v}$ $\delta^{(1)} \underline{v}$ $\delta^{(1)} \Phi(\zeta)$ $\underline{v}_{sd} = \langle \delta \underline{v} \rangle$ $\underline{m} = h \underline{v}$	Geschwindigkeitsfeld der Strömung Eulersches Geschwindigkeitsfeld Geschwindigkeitsfeld des Seegangs Geschwindigkeitsfeld linearer Seegangsmoden Geschwindigkeitspotential linearer Seegangsmoden Stokesdrift Aktuelle Wassertiefe multipliziert mit der gegenwärtigen Strömungsgeschwindigkeit.
$\omega = \nabla \times \underline{v}$ $\omega_e = \nabla \times \underline{v}_e$ $\delta \omega = \nabla \times \delta \underline{v}$ $\delta^{(1)} \omega = \nabla \times \delta^{(1)} \underline{v}$	Vorticity: Rotation des Geschwindigkeitsvektors Vorticity der Eulerschen Strömung Vorticity des Geschwindigkeitsfeldes der Wellen. Vorticity linearer Seegangsmoden.
q $\mathcal{K}(q)$ $\underline{\Omega}_{\oplus}$ f $\phi(z) = \rho g z$ ρ oder ρ_w	Potentielle Vorticity z.B. Beispiel1 (Kap. 4.1): $q = \omega$, Beispiel2 (Kap. 4.2): $q = (\hat{\underline{z}} \cdot \nabla \times \underline{v} + f)/h$ Bernoulli-Funktion Planetare Winkelgeschwindigkeit der Erde \oplus Coriolisparameter Geopotential der Erde Dichte des Wassers
$\underline{\underline{S}} \equiv S_{ij}$ $\nabla_{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{S}} \equiv \nabla_{X_j} \cdot \hat{S}_{ij}$ $\underline{\underline{S}}$ $\underline{\underline{A}}$	Der Radiationstresstensor Zusammenfassung der vertikal integrierten und phasengemittelten <i>RHS</i> -Terme der Störungsentwicklung 2. Ordnung. Das schließt die Divergenz des Radiationstress und die advektive Ableitung der mittleren Strömung ($\langle \underline{v} \rangle \cdot \nabla \langle \underline{v} \rangle$) ein. Der Radiationstress-Tensor $\underline{\underline{S}}$ vor der vertikalen Integration und Phasenmittelung. Die Anteile der advektiven Ableitung von $\langle \underline{v} \rangle$, die nach vertikaler Integration und Phasenmittelung zusammen mit $\underline{\underline{S}}$ zum Tensor $\underline{\underline{A}}$ zusammengefasst werden können.

Mathematische und Physikalische Bezeichnungen (5)	
Q_{in}, Q_{phil}	Windinput- und Phillips-Input-Source-Funktionen
Q_{dis}	Nichtlineare Dissipations-Source-Funktion
Q_{bot}, Q_{wcap}	Lineare Dissipations-Source-Funktionen für Bodenreibung und Schaumkronen-Bildung
Q_{tot}	Summe der Source-Funktion $Q_{in}, Q_{phil}, Q_{dis}, Q_{bot}$ und Q_{wcap}
τ_i	Die Windschubspannung
$\tau_i^{S\&B}$	Parametrisierung der Windschubspannung nach Smith & Banke [SB75].
τ_i^w	Seegangsabhängige Parametrisierung der Windschubspannung. (Kapitel 8.2)
C_D	Windschubspannungs-Koeffizient. <i>BSHmod</i> : Ansatz von Smith & Banke $C_D = (0.63 + 0.066 v_{10}/(m/s)) \cdot 10^{-3}$, Wellenmodell: Ansatz von Wu [Wu82] $C_D = 0.0036$
$v_* \equiv \sqrt{C_D v_{10}^2}$	Reibungsgeschwindigkeit des Windefeldes
v_{10}	Geschwindigkeit des Windfeldes in 10 m Höhe über dem Wasser.
$G(k, \theta_w, \theta_s, u_*)$	Skalare Funktion die den Einfluss der Böigkeit des Windes auf den Input von Energie und Impuls in das Seegangsfeld beschreibt.
θ_w und θ_s	Richtung des Wind- und Seegangsfeldes
f_{PM}	Peakfrequenz des Pierson-Moskowitz Spektrums
f_P	Peakfrequenz des Spektrums
Definierte Konstanten (Siehe auch Tabelle 6.1 und Tabelle 6.2)	
<i>Symbol</i>	<i>Bedeutung</i>
$k_B = 1.3805 \cdot 10^{-23} J/K$	Boltzmann-Konstante
$g = 9.81 m/s^2$	Schwerebeschleunigung der Erde

Literaturverzeichnis

- [Ab86] Axsbarbanel, H.D.I., D.D. Holm, J.E. Marsden and T.S. Ratiu, „Nonlinear Stability Analysis of Stratified Fluid Equilibria.“, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A318, pp. 349-409, 1986
- [Ap87] Apel, J.R., „Principles of Ocean Physics“, Academic Press, Int. Geophys. Series, Vol. 38, 1987
- [Arn65a] Arnold, V.I., „Conditions for nonlinear stability of the stationary plane curvilinear flows of an ideal fluid.“, Doklady Mat. Nauk., 162(5), pp. 773-777, 1965
- [Arn65b] Arnold, V.I., „Variational principle for three dimensional steady-state flows of an ideal fluid.“, J. Appl. Math. Mech., 29, pp. 1002-1008, 1965
- [An66a] Arnold, V.I., „Sur la geometrie differentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications a l'hydrodynamique des fluids parfaits.“, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 16, pp. 319-361, 1966
- [An66b] Arnold, V.I., „On an a priori estimate in the theory of hydrodynamical stability.“, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. 54(5), 3-5 ; Engl. transl.: Am. Math. Soc. Transl., Ser.2 79, pp. 267-269, 1969
- [An69] Arnold, V.I., „Hamiltonian character of the Euler equations of the dynamics of solids and of an ideal fluid.“, Uspekhi Mat. Nauk 24, pp. 225-226, 1969
- [An89] Arnold, V.I., „Mathematical Methods of Classical Mechanics.“, Springer-Verlag, 1989
- [AM99] Marsden J.E., T.S. Ratiu „Introduction to Mechanics and Symmetry.“, Springer-Verlag, 1999
- [Back80] Backhaus, J.O., „Simulation von Bewegungsvorgängen in der Deutschen Bucht“, Deutsche Hydrographische Zeitschrift, Erg-H, B, 15, 1980
- [Bow68] Bowen, A.J., D.L. Inman and V.P. Simmons, „Wave Set-Down and Set-Up“, J. Geophys. Res., Vol. 73, No. 8, 1968
- [Bre68] Bretherton, F.P. „Propagation in slowly varying waveguides“, Proc. R. Soc. Lond., A 302, pp. 545-576, 1968
- [BrG68] Bretherton, F.P., C.J.R. Garrett, „Wavetrains in inhomogeneous moving media“, Proc. R. Soc. Lond., A 302, pp. 529-544, 1968
- [BSH01] Dick, S., E. Kleine, S.H. Müller-Navarra, H. Klein, H. Komo, „The Operationa Circulation Model of BSH (BSHcmod), Model description and validation“, Berichte des BSH, 29, 2001

- [Cav81] Cavaleri, L., P.M. Rizzoli, „Wind wave prediction in shallow water - theory and application.“, J. Geophys. Res., 86, pp. 10961-10973
- [Cur79] Curtis, E.M., „Wave induced longshore currents outside the surf zone“, Master's thesis, Mass. Inst. Technol., Cambridge, Mass., 1979
- [Dik65b] Dikii, L.A., „On the nonlinear theory of hydrodynamic stability, Prikl. Math. Mech, 29, pp. 852-855
- [Don90] Donelan, M.A., „Air-Sea interaction.“in „The Sea. Ocean Engineering Science“, Vol 9A, Chapter 7, B. LeMehaute and D. Hanes (eds.), Wiley Interscience, New York, 1990, pp. 239-292
- [Don99] Donelan, M.A., „Wind-induced, growth and attenuation of laboratory waves.“, Wind-Over-Wave Couplings, S.G.Sajjadi et al., Eds., Clarendon Press, ,1999, pp. 183-194
- [DHI63] Deutsche Hydrographisches Institut, Meereskundliche Beobachtungen und Ergebnisse Nr.20, „Beobachtungen auf den deutschen Feuerschiffen der Nord- und Ostsee im Jahre 1962 sowie Monatsmittelwerte von Temperatur und Salzgehalt des Jahres 1962“, Hamburg 1963
- [Due85] Dünsing, G., O. Höflich, L. Kaufeld, H. Schmidt, G. Olbrück und B. Brandt, „Meteorologische Untersuchungen über Stürme an der deutschen Nordseeküste.“, Deutscher Wetterdienst, Seewetteramt, Einzelveröff. Nr. 108 57 S. Hamburg, 1985
- [Gal65] Galvin, C.J., and P.S. Eagleson, „Experimental study of longshore currents on a plane beach“. Techn. Memo U.S. Army coastal Eng. Res. Ctr., 10, pp. 80, 1965
- [Gar68] Garrett, C.J.R., „On the interaction between internal gravity waves and a shear flow“, J. Fluid. Mech., vol.34, part 4, pp. 711-720, 1968
- [Han62] Hansen, W., „Die Sturmflut am 16.17. Februar 1962 und andere Nordseesturmfluten.“, Instituto Veneto die Scienze, Lettere ed Arti Atti del Simposio Internazionale Venezia, pp. 71-87, 1962.
- [Han66] Hansen, W., „The reproduction of the motion in the sea by means of hydrodynamical - numerical methods.“, Mitteilungen des IfM der Universität Hamburg, Nr.5, 1966.
- [Has61] Hasselmann, K., „On the non-linear energy transfer in a gravity-wave spectrum, part 1: General theory“, J. Fluid Mech, vol. 12, part1, pp. 481-500, 1961.
- [Has66] Hasselmann, K., „Feynman diagrams and interaction rules of wave-wave scattering processes“, Rev. Geophys. Space Phys., vol. 4, pp. 1-32, 1966.
- [Has67] Hasselmann, K., „Nonlinear interactions treated by the methods of theoretical physics (with application to the generation of waves by wind)“, Proc. Roy. Soc. London, A299, pp. 77-100, 1967.
- [Has68] Hasselmann, K., „Weak-interaction theory of ocean waves“, Basic developments in Fluid Dynamic, 2, pp. 117-182, 1968.
- [Has71] Hasselmann, K., „On the mass and momentum transfer between short gravity waves and larger-scale motions“, J. Fluid Mech, vol. 50, part1, pp. 189-205, 1971.
- [Has73] Hasselmann, K., T.P. Barnett, E. Bouws, H. Carlson, D.E. Cartwright, K.Enke, J.A. Ewing, H.Gienapp, D.E. Hasselmann, P. Kruseman, A. Meerburg, P. Müller, D.J. Olbers, K. Richter, W. Sell, H. Walden, „Measurements of Wind-Wave Growth and Swell Decay during the Joint North Sea Wave Project (JONSWAP)“, Ergänzungsheft zu Deutschen Hydrographischen Zeitschrift, Reihe A, No. 12, 1973

- [Hea69] Heaps, N.S., „A two-dimensional numerical sea model.“, Philosophical Transactions of the Royal society of London, A, Vol. 265, pp. 93-137, 1969.
- [Hen64] Hensen, W., „Lehren für Wissenschaft und Praxis aus der Nordsee-Sturmflut am 16./17. februar 1962“, Vortragsreihe der Niedersächsischen Landesregierung, Heft 28, Vandenhoeck & Ruprecht in Göttingen, 1964.
- [Hew80] Hewer, R., „Untersuchungen zur Entwicklung von Extremsturmfluten an der deutschen Nordseeküste auf der Basis hydrodynamisch-numerischer Modelle.“, Diplomarbeit, 1980.
- [HGS89] Hogan, S.J., I. Gruman, M. Stiassnie, „On the changes in phase speed of one train of water waves in the presence of another“, Radar Scattering from Modulated Wind Waves, G.J. Komen and W.A.Oost (eds.), Kluwer Academic Publishers, pp. 121-137, 1989
- [Hol84] Holm, D.D., J.E. Marsden, T. Ratiu, A. Weinstein, „Nonlinear Stability of Fluid and Plasma Equilibria“, Physics Reports (Review Section of Physics Letters) 123, Nos. 1 and 2 (1985), pp. 1-116
- [Iwa70] Iwata, N. „A Note on the Wave Set-Up, Longshore Currents and Undertows“, Jour. Oceanogr. Soc. Jap., Vol 26, No. 4, pp. 233-236, 1970
- [Jen05] Jensen, J., I. Bork, Ch. Koziar, Ch. Mudersbach, S.H. Müller-Navarra, V. Renner, „Abschlussbericht MUSE, Modellgestützte Untersuchungen zu Sturmfluten mit sehr geringen Eintrittswahrscheinlichkeiten.“, BMBF Förderkennz. 03KIS039, 2005
- [Kls95] Kleine, E., S. Sklyar, „Mathematical features of Hibler’s Model of large-scale sea-ice dynamics.“, Dt. Hydrogr. Z., Vol 47 No. 3, pp. 179-230, 1995
- [Kom94] Komen, G.J., L.Cavaleri, M.Donelan, K.Hasselmann, S.Hasselmann and P.A.E.M.Janssen., „Dynamics and Modelling of Ocean Waves.“, Cambridge University Press, 1994.
- [Kop62a] Koopmann, G., „Die Sturmflut vom 16./17. Februar 1962 in ozeanographischer Sicht“, Die Küste, Jahrgang 10, Heft 2, pp. 55-68, 1962
- [Kop62b] Koopmann, G., „Wasserstandserhöhung in der Deutschen Bucht infolge von Schwingungen und Schwallerscheinungen und deren Bedeutung bei der Sturmflut vom 16./17. Februar 1962.“, DHZ, Jahrgang 15, Heft 1, pp. 181-198, 1962
- [Lef99] Lefebvre, CH., „Orkantief Anatol’ vom 3./4. Dezember 1999“, Deutscher Wetterdienst: Klimastatusbericht 1999, Offenbach, 1999
- [Lon70] Longuet-Higgins, M.S., „Longshore currents generated by obliquely incident sea waves 2“, J. Geophys. Res., 75(33), 1970
- [LoP61] Longuet-Higgins, M.S., O.M. Phillips, „Phase velocity effects in tertiary wave interactions“, J. Fluid. Mech., Vol. 12, pp. 333-336
- [LoS60] Longuet-Higgins, M.S., R.W.Stewart., „Changes in the form of short gravity waves on long waves and tidal currents“, J. Fluid. Mech., vol. 8, pp. 565-583, 1960
- [LoS61] Longuet-Higgins, M.S., R.W.Stewart., „The changes in amplitude of short gravity waves on steady non-uniform currents“, J. Fluid. Mech., vol. 10, pp. 529-549, 1961
- [LoS62] Longuet-Higgins, M.S., R.W.Stewart., „Radiation stress and mass transport in gravity waves“, J. Fluid. Mech., vol. 13, 1962

- [LoS64] Longuet-Higgins, M.S., R.W.Stewart., „Radiation stresses in water waves; a physical discussion, with applications“, Deep Sea Research, vol. 11, pp. 529-562, Pergamon Press Ltd., 1964
- [McI78a] Andrews, D.G., M.E. McIntry, „An exact theory of nonlinear waves on a Lagrangian-mean flow“, J. Fluid. Mech., Vol 89, pp. 647-664
- [Mel03] Mellor G. „The three-dimensional Current and Surface Wave Equations.“, Journal of Physical Oceanography, Volume 33, pp. 1978-1989, 2003
- [Mil57] Miles, J.W., „On the generation of surface waves by shear flows“, J. Geophys. Res., 99, pp. 18501-18511, 1957.
- [Mil75] Miles, J.W., „Nonlinear surface waves in closed basins“, J. Fluid. Mech., Vol.75, pp. 419-448, 1975.
- [Mil76] Miles, J.W., „On Hamilton's principle for surface waves“, J. Fluid. Mech., Vol.83 part 1, pp. 153-158, 1976.
- [Mnk49] Munk, W.H., „The solitary wave theory and its application to surf problems.“, Ann. N. Y. Acad. Sci., 51, pp. 376-424, 1949
- [Mue02] Müller-Navara, S. H. „Zur Vorhersage schwerer Sturmfluten an der deutschen Nordseeküste“, Deutsches Komitee für Katastrophenvorsorge e.V. (DKKV), Zweites Forum Katastrophenvorsorge, „Extreme Naturereignisse - Folgen, Vorsorge, Werkzeuge“, Herausgegeben von G. Tetzlaff, T. Trautmann, K.S. Radtke, pp. 34-42, 2002
- [Mue03] Müller-Navara, S. H., W. Lange, S. Dick, K. C. Soetje, „Über die Verfahren der Wasserstands- und Sturmflutvorhersage, Hydrodynamisch-numerische Modelle der Nord- und Ostsee und ein empirisch-statistisches Verfahren für die Deutsche Bucht“, Deutscher Wetterdienst, promet, Jahrg 29, Nr 1-4, pp. 117-124, 2003
- [Mue06] Müller-Navara, S. H., I. Bork, J. Jensen, C. Koziar, C. Mudersbach, A. Müller, E. Rudolph, „Modellstudien zur Sturmflut und zum Hamburg-Orkan 1962“, (unveröffentlicht), 2006
- [NS97] Nore, C., T.G. Shepherd, „A Hamiltonian weak-wave model for shallow-water flow“, Proc. R. Soc. Lond., Vol.453, pp. 563-580, 1997
- [Ped87] Pedlosky, J., „Geophysical Fluid Dynamic“, Springer-Verlag New -York, 1987
- [Phi69] Phillips, O.M., „The Dynamic of the upper Ocean“, Cambridge Monographes on Mechanics and Applied Mathematics, Cambridge University Press, 1969
- [Phl77] Phillips, O.M., „The Dynamics of the Upper Ocean“, Cambridge University Press, 1977
- [Pie64] Pierson, Jr., W.J., L. Moskowitz, „A proposed spectral form for fully developed wind seas based on the similarity theory of S.A. Kitaigorodskii“, J. Geophys. Res.,69, pp. 5181-5190, 1964
- [Pij90] Kundu, Pijush K., „Fluid Mechanics“, Academic Press, 1990
- [Pow03] Powell, M.D., P.J. Vickery, T.A. Reinhold, „Reduced drag coefficient for high wind speeds in tropical cyclones.“, Nature, 422, pp. 279-283, 2003
- [Pri77] Prigogine I., G. Nicolis, „Self-Organization in Nonequilibrium Systems“, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons (New York, London, Sydney, toronto), 1977

- [Ra82] Ratiu, T., „Euler-Poisson Equations on Lie algebras and the N-dimensional heavy rigid body“, *Am.J.Math.* 104, pp. 409-448, 1337
- [Rod62] Rodewald M., „Zur Entstehungsgeschichte der Sturmflut-Wetterlagen in der Nordsee im Februar 1962“, *Die Küste*, Jahrgang 10/1962, Heft 2, pp. 1-54, 1962
- [Ros84] W. Rosenthal, Dolata L.F. „Wave Setup and Wave-Induced Currents in Coastal Zones.“, *Journal of Geophysical Research*, vol. 89, No C2, pp. 1973-1982, 1984
- [Ros89] W. Rosenthal, „Derivation of Phillips α -parameter from turbulent diffusion as a damping mechanism.“, *Radar Scattering from Modulated Wind Waves*, Kluwer Academic Publisher, 1989.
- [Sal88] Salmon R., „Semigeostrophic theory as a Dirac-bracket projection“, *J. Fluid. Mech.*, vol 196, pp. 345-358, 1988
- [Schm78] Schmitz H.P., „Sturmfluterzeugende Vorgänge in der Nordsee“, *promet*, Jahrgang 8., Heft 4, pp. 2-5, 1978
- [Sch97] Schneggenburger, C., H. Günther, W. Rosenthal „Shallow Water Wave Modelling with Non-linear Dissipation“, *Deutsche Hydrographische Zeitschrift*, Vol. 49, No.2/3, pp. 431-444, 1997
- [Sch98] Schneggenburger, C., „Spectral Wave Modelling with Nonlinear Dissipation.“, *Dissertation*, GKSS 98/E/42, 1998.
- [Sh90] Shepherd, T.G., „Symmetries, Conservation Laws, and Hamiltonian Structure in Geophysical Fluid Dynamics“, *Advances in Geophysics*, Vol. 32, pp. 287-338, 1990
- [SB75] Smith, S.D., E.G. Banke, „Variation of the sea surface drag coefficient with wind speed.“, *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 101, pp. 665-673
- [SoB83] Soetje, K.C., Ch. Brockmann, „An operational numerical model of the North Sea and the German Bight“, *North Sea Dynamics*. ed. by Sündermann/Lenz, pp. 95-107
- [Sny81] Snyder, R.L., F.W.Dobson, J.A.Elliott and R.B.Long, „Array measurements of atmospheric pressure fluctuations above surface gravity waves.“, *J. Fluid. Mech.*, 102, pp. 1-59, 1981.
- [SS92] Scinocca, J.F., T.G. Shepherd, „Nonlinear Wave-Activity Conservation Laws and Hamilton Structure for the two-dimensional Anelastic Equations.“, *J. Atmos. Sci.*, 49, pp. 5-25, 1992
- [Sun71] Sündermann, J., „Die hydrodynamisch-numerische Berechnung der Vertikalstruktur von Bewegungsvorgängen in Kanälen und Becken“, *Mitt. d. Inst. F. Meereskd. Univ. Hamburg*, 19, pp. 97, 1971
- [Swe89] Swenson, R., „Emergent Attractors and the Law of Maximum entropy Production: Foundations to a Theory of General Evolution.“, *Systems Research* Vol. 6, No. 3, pp. 187-197, 1989
- [Tol92] Snyder, R.L., F.W.Dobson, J.A.Elliott and R.B.Long, „Array measurements of atmospheric pressure fluctuations above surface gravity waves.“, *J. Fluid. Mech.*, 102, pp. 1-59, 1981.
- [VS98] Vaneste, J., T.G. Shepherd, „On wave action and phase in the non-canonical Hamiltonian formulation.“, *Proc. R. Soc. Lond.*, 455, pp. 3-21, 1999
- [WAM88] WAMDI group: S. Hasselmann, K. Hasselmann, E. Bauer, P.A.E.M. Janssen, G.J. Komen, L. Bertotti, P. Lionello, A. Guillaume, V.C. Cardone, J.A. Greenwood, M. Reistad, L. Zambresky and J.A. Ewing, „The WAM model - a third generation ocean wave prediction model.“, *J. Phys. Oceanogr.* 18, pp. 1775-1810, 1988.

- [War93] Warsi Z.U.A., „Fluid Dynamics - Theoretical and Computational Approaches“, CRC Press Inc., 1993
- [Whi67] Whitham, G.B., „Variational methods and applications to water waves“, Proc. Roy. Soc., A 299, pp. 6-25, 1967
- [Whi74] Whitham, G.B., „Linear and Nonlinear Waves“, John Wiley and Sons Inc., 1974
- [Wil75] Willebrand, J., „Energy transport in a nonlinear and inhomogeneous random gravity wave field“, J. Fluid. Mech., 70, pp. 113-126, 1975
- [Wu82] Wu, J., „Wind-stress coefficients over sea surface from breeze to hurricane“, J. Geophys. Res., 87, pp. 9704-9706, 1982
- [Zak68] Zakharov, V.E., „Stability of periodic waves of finite Amplitude on the surface of a deep fluid.“, Zhurnal Prikladnoi Mekhaniki i Tekhnicheskoi Fiziki, Vol. 9, No. 2, pp. 86-94, 1968